Introduction à la théorie des jeux Théorie - Applications - Problèmes

Ernst-Ludwig von Thadden

Juillet 2004

Table des matières

In	trod	uction	1
Ι	Je	ux sous forme normale	5
1	Déf	initions et concepts de solution	7
	1.1	Les jeux	7
	1.2	Exemples:	10
	1.3	Comportement stratégique rationnel	20
	1.4	Problèmes	33
2	Apj	plication : Les enchères	35
	2.1	Quelques remarques générales	35
	2.2	L'enchère au premier prix	39
	2.3	L'enchère au second prix	44
	2.4	Problèmes	46
3	Jeu	x sous forme normale : théorie	49
	3.1	La relation entre les concepts de solution	50
	3.2	Stratégies mixtes	52
	3.3	Existence des équilibres de Nash	58
	3.4	Justifications de l'équilibre de Nash	58
	3.5	Problèmes	63
4	Apj	plications	65
	4.1	Feuille, caillou, ciseau	65
	4.2	Les penalties	67
	4.3	Les offres publiques d'achat	71

	4.4	Problèmes	77
5	Stal	oilité évolutionnaire	80
	5.1	Mutation	82
	5.2	Stabilité et sélection	85
	5.3	Problèmes	95
ΙΙ	Je	eux sous forme développée	97
6	Jeu	x à information parfaite	100
	6.1	Quelques exemples	100
	6.2	Des définitions plus générales	
	6.3	Problèmes	
7	App	olication : Le marchandage	116
	7.1	Le jeu fini	117
	7.2	Le jeu infini	126
	7.3	Problèmes	133
8		1	135
	8.1	Théorie	
	8.2	Echanges internationaux	
	8.3	Attaques spéculatives	
	8.4	Problèmes	155
9		•	159
	9.1	Stratégies et équilibres	
	9.2	Au-delà des jeux statiques	
	9.3	Problèmes	174
$\mathbf{A}_{]}$	ppe	ndice : Solutions aux problèmes choisis	L77
Bi	bliog	graphie	196
Inc	\mathbf{dex}		200

Introduction

Ce cours donne une introduction systématique à la théorie économique des interactions stratégiques. Pour des raisons historiques et de marketing intellectuel cette théorie porte le nom de la théorie des jeux (non-coopératifs), nom qui pourrait laisser croire que la théorie aborde des problèmes à caractère ludique ou même futile. Ce n'est bien évidemment pas le cas. Bien que, historiquement, l'étude des jeux de société tels que les échecs ou le poker fût une des sources d'inspiration de la "théorie des jeux", la théorie moderne s'est éloignée de ses racines et étudie plus généralement le comportement stratégique d'individus dans des contextes économiques, sociaux, politiques et militaires. Ce cours développe à la fois des éléments de la théorie générale et donne des applications dans des domaines aussi divers que la finance, le marketing, le sport, les échanges internationaux, la biologie et les sciences politiques.

La théorie des jeux, pour laquelle R. Aumann (1987) a proposé l'appellation alternative de théorie des décisions interactives, met à notre disposition un langage puissant pour la description et l'analyse des interactions sociales. Elle n'apporte cependant pas de "solutions" à ces situations au même titre que le fait la recherche opérationnelle, car elle part du principe que la notion même de "solution" est problématique dans des interactions en groupe. En effet, la poursuite de l'intérêt individuel n'est souvent pas compatible avec celle de l'intérêt du groupe quelle que soit sa définition. De fait, cet intérêt est-il défini comme indice composé d'intérêts individuels, indicateur de l'intérêt collectif minimal, contenu d'un arrangement entre les individus ou résultat de la confrontation personnelle d'intérêts? A cause de cette ambiguïté, la théorie des jeux non-coopératifs propose une approche minimaliste à ce problème en étudiant en détail les intérêts individuels et leurs interactions et en proposant des concepts de "stabilité" de comportement qui respectent ces intérêts.

Cependant, la théorie, ou du moins celle de base, partage avec la recherche opérationnelle l'approche d'optimisation. Elle part du principe que les agents, dans une interaction stratégique, sont capables de choisir des stratégies qui sont dans leur intérêt. Ceci peut être justifié de deux façons différentes. D'une part, il y a l'hypothèse de rationalité individuelle, limitée certes, mais qui agit comme moteur des actions individuelles. D'autre part, il y a l'hypothèse d'apprentissage ou d'évolution basée sur le fait que le choix des individus n'est pas conscient, mais exercé et appris au cours des interactions répétées. Par conséquence, la théorie ne s'applique pas facilement aux jeux "très complexes", tels que les échecs : les joueurs doivent être capables de trouver des stratégies "optimales", soit à travers le calcul, soit en apprenant par répétition.

La théorie des jeux telle qu'elle se présente aujourd'hui n'est pas une théorie homogène et unifiée. Tout au contraire, il existe des désaccords importants parmi les chercheurs en ce qui concerne la portée, la logique et l'interprétation d'un certain nombre de ses résultats. Dans ce cours, nous nous limitons donc à la présentation des éléments les plus simples de la théorie en nous appuyant au maximum sur des exemples. Cela nous permet de présenter les notions fondamentales de la théorie, acceptées ou du moins utilisées par la communauté scientifique, tout en évitant les développements plus complexes et les débats qui s'y rapportent. Bien que dans ce cours j'évite les complexités mathématiques autant que possible, la rigueur de la termonologie est de mise, et plus particulièrement celle de l'expression mathématique. Nous travaillons ainsi avec des définitions précises, des arguments et dérivations détaillés et des questions exactes, sans que cette précision ne demande des connaissances mathématiques poussées allant au delà des cours d'introduction de première année universitaire. En particulier, bien qu'il soit indispensable de pouvoir maximiser des fonctions à une variable pour suivre ce cours, aucune connaissance du calcul intégral n'est requise.

Comme il est mentionné auparavant, au lieu du développement de la théorie générale, nous avons souvent recours à des exemples, tirés entre autres de l'économie, de la politique ou de la biologie. Un effort particulier a été fourni dans le choix des aplications, en évitant celles se rattachant à l'économie industrielle, car ce domaine, inspiré par l'ouvrage de J. Tirole (1988), est devenu un champ d'application majeur de la théorie des jeux. En outres, la théorie de la finance a commencé, au cours des dernières années, à se développer dans une direction qui privilègie le raisonnement stratégique, une évolution qui est bien nécessaire pour comprendre les interactions stratégiques en finance

d'entreprise, dans la concurrence entre banques, l'organisation des échanges boursiers, ou dans les crises financières internationales pour ne mentionner que quelques exemples. C'est pour cette raison que, tout en essayant d'aborder un nombre représentatif des innombrables champs d'application de la théorie, ce cours donne une légère préférence aux exemples liés à la finance. De plus, je présente en détail six applications qui ont marqué le développement de la théorie des jeux, à savoir : les enchères, les penalties au football, les offres publiques d'achat en finance, le marchandage, les échanges internationaux et les crises financières internationales. A ces discussions détaillées s'ajoutent un grand nombre d'exemples, soit développés dans le cours, soit analysés dans les exercices.

En général, l'économiste ou le politologue qui utilise la théorie des jeux pour modéliser une situation donnée simplifie énormément le phénomène analysé. Il en découle souvent que les jeux ainsi obtenus sont trop simples pour être utilisés comme aide à la prise de décision dans des situations pratiques. Cela implique-t-il que ces théories sont inutiles? La réponse dépend largement de ce que le chercheur ou le praticien attend d'un modèle. Si on souhaite que le modèle soit une représentation aussi précise et détaillée de la réalité que les meilleures données empiriques le permettent, le modèle sera souvent trop complexe pour être analysable par la théorie des jeux. Souvent, cela n'est pas le but ni pour le chercheur, ni pour l'homme de la pratique. Généralement, il convient d'extraire certains traits essentiels de la situation considérée, aux dépens d'autres aspects, afin d'obtenir une image compréhensible et utilisable des interactions présentes dans la situation donnée. C'est dans cette perspective que les modèles de la théorie des jeux ont leur majeure force.

Nous partageons donc aussi l'avis d'un nombre croissant de chercheurs en gestion qui voient la théorie des jeux comme un outil important de la formation au management. Comme le remarquait J. Thépot (1998), "la théorie des jeux ne prétend être rien d'autre qu'une manipulation de faits stylisés, destinés à nourrir la réflexion du décideur en l'aidant à prendre en compte les interactions stratégiques avec ses protagonistes". Plus les interactions du monde des affaires deviennent complexes et variées, plus il est important pour les décideurs de disposer d'outils intellectuels qui permettent d'analyser et de comprendre les actions des acteurs de l'interaction.¹

¹Ce n'est donc pas un hasard que les années dernières ont vu la parution de plusieurs très bons ouvrages traitant la théorie des jeux en gestion. Notons, sans être exhaustifs :

Pour cette raison, la théorie des jeux, et surtout ses applications, se trouve souvent, dans le spectre intellectuel des sciences sociales, plus proche de La Fontaine que de la Harvard Business School. Les jeux que nous étudions dans ce cours sont des symboles qu'il faut savoir déchiffrer et qui viennent même, parfois, en guise de parabole. En fait, étant donné le caractère assez mathématique de la théorie, le déchiffrage peut presque être pris littéralement. Le fameux "dilemme du prisonnier" en est l'exemple le plus célèbre. Par contre, les études de cas de la Harvard Business School offrent au lecteur l'intégralité des faits accompagnés des détails qualitatifs et quantitatifs jusqu'à l'appendice, visant à "donner toute l'histoire". Il en résulte que l'art de lire un tel cas est de trier les faits selon les intérêts du lecteur face à une situation donnée. Par opposition, l'art de lire un modèle de la théorie des jeux est de l'enrober et de l'intégrer dans une réalité plus complexe. Dans ce sens, ces deux approches sont différentes, mais fortement complémentaires.

[&]quot;Co-opetition" de B. Nalebuff et A. Brandenburger, "Strategisches Konfliktmanagement in Organisationen" de P. Jost et "Théorie des jeux appliquée à la gestion" de G. Umbhauer.

Première partie Jeux sous forme normale

Comme la théorie des jeux traite d'une grande variété de problèmes économiques, politiques ou autres, il est peu surprenant que la notion de base de la théorie - ce qui est un "jeu" - est abstraite et semble être loin de la description des jeux de société que nous connaissons. Mais évidemment les jeux de société ne représentent qu'une petite partie du kaléidoscope des interactions stratégiques. Aussi, il importe de rappeler que la théorie des jeux, comme toute théorie, est née de l'abstraction. Lors du passage du problème concret à la description générale, un certain nombre de facettes de tout problème doit être négligé afin de pouvoir se concentrer sur les aspects essentiels de l'interaction.

Cette vision est à la base du concept de la forme normale d'un jeu. Dans la première partie de ce cours nous introduisons et discutons ce concept, qui est le concept fondamental de la théorie des jeux. Né du génie des mathématiciens Emile Borel et John von Neumann aux années 1920, ce concept réduit la description d'une interaction stratégique à un minimum absolu et pousse donc l'abstraction au maximum. D'apparence simple, nous verrons tout au long de ce cours que la forme normale est un concept avec une énorme portée, qui permet de décrire et d'interpréter une grande variété d'interactions en sciences sociales. En particulier, nous verrons dans la deuxième partie du cours que le concept, malgré son apparence statique, fournit un cadre approprié pour des interactions dynamiques, essentiel pour l'analyse de phénomènes de nature plus complexe.

Chapitre 1

Définitions et concepts de solution

1.1 Les jeux

Que constitue donc un jeu? Comme dans la vie quotidienne, nous allons ici décrire un jeu par ses règles. Evidemment, les règles d'un jeu doivent indiquer combien de joueurs jouent ou peuvent jouer le jeu en question. Mais quoi d'autre? Les règles de jeu de la plupart des jeux de société décrivent en détail comment le jeu évolue et ce que tout joueur peut et ne peut pas faire à chaque étape du jeu. Elles mettent donc l'accent sur l'aspect dynamique du jeu et définissent en fonction du déroulement du jeu les options pour le comportement des joueurs, donc leurs stratégies disponibles. Ici, nous venons de rencontrer la première notion fondamentale de la théorie des jeux : une stratégie est une description complète du comportement d'un joueur à chaque circonstance possible. Nous reviendrons en détail à cette définition dans la deuxième partie de ce cours. En simplifiant, on peut donc dire que les règles des jeux de société ont tendance à définir les stratégies par la description du déroulement du jeu. Ici, nous renversons cette logique et nous définissons le déroulement d'un jeu par les stratégies qui sont disponibles aux différents joueurs, ce qui nous amène au concept de la forme normale d'un jeu. Ce concept s'est avéré fondamental dans la théorie des jeux, par sa simplicité et par sa généralité. Surtout, ce concept nous permet de décrire de manière simple des situations sociales simples, aide ainsi à économiser la réflexion.

La comparaison avec les jeux de société est utile parce qu'elle montre la

complexité potentielle énorme des interactions définies par des listes de règles relativement courtes. Quand même, ces jeux sont trop simples sous un autre angle. Dans un jeu de société, les objectifs des différents joueurs sont simples : ils veulent gagner. De plus, normalement, c'est un seul joueur qui gagne et les autres, par définition, perdent. Les situations stratégiques de la vie économique ou politique sont plus complexes : il y a des situations où plusieurs joueurs peuvent gagner, où les intérêts sont partiellement congruents, où cela est le cas pour un sous-groupe de joueur, mais pas pour les autres, etc. En bref, pour être utile dans les sciences sociales, une définition de ce qu'est "un jeu", doit être suffisamment générale par rapport aux intérêts stratégiques des joueurs. La troisième partie de la définition suivante vise à atteindre cet objectif.

Définition : Un jeu sous forme normale est la donnée de \mathcal{N} , $(X_i)_{i\in\mathcal{N}}$, $(u_i)_{i\in\mathcal{N}}$, où

- $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$ $(2 \le n \le \infty)$ est l'ensemble des acteurs (appelés "joueurs") qui interagissent dans la situation en considération,
- pour chaque joueur $i \in \mathcal{N}, X_i$ est l'ensemble de ses "stratégies" disponibles,
- pour chaque $i, u_i : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow \mathbb{R}$ associe à chaque "issue" $x = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ une valeur numérique, le "paiement" ou "l'utilité" du joueur.

Dans cette définition, nous avons utilisé certaines notations mathématiques qui facilitent la description. X_i peut être n'importe quelle collection d'éléments x_i possibles (que nous appellerons aussi des actions du joueur i), nous allons en voir plusieurs exemples tout de suite. L'ensemble de tous ces éléments définit ce que le joueur i peut faire dans le jeu considéré. Si tout joueur choisit un tel élément, la collection de ces n éléments $x_i \in X_i$ est dénotée $x = (x_1, ..., x_n)$. x est aussi appelé l'issue du jeu, parce que, par définition, le jeu est terminé quand tout joueur a exécuté sa stratégie. L'ensemble de toutes les issues possibles est dénoté $X = X_1 \times ... \times X_n$. Tout joueur i associe à chaque issue $x \in X$ une valeur $u_i(x) \in \mathbb{R}$, où \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels, qui décrivent soit un paiement monétaire (par exemple dans le cas du poker ou d'une négociation salariale), soit l'équivalent monétaire d'une issue, qui mesure la valeur relative attribuée à cette issue par le joueur. Les fonctions u_i décrivent les préférences des joueurs par rapport aux issues du jeu; nous reviendrons à l'interprétation de ces fonctions au chapitre 3.

1.1. LES JEUX 9

Dans la définition nous nous limitons au cas d'un nombre fini de joueurs. Formellement il n'y a pas de problème d'étendre cette définition au cas d'une infinité de joueurs (voir le chapitre 4 pour un exemple).

La définition ci-dessus décrit de manière compacte les joueurs, leurs stratégies et leurs intérêts stratégiques. Elle ne dit rien par rapport à l'activité durant le jeu : "les avantages temporaires", "les ruses", "les surprises", et tous les autres éléments qui caractérisent le déroulement d'un jeu de société. En fait, ces éléments sont peu intéressants pour le théoricien des jeux, qui s'intéresse seulement à l'évaluation finale de la partie par les joueurs. Aussi, nous ne nous intéressons pas à tous les détails de l'identité des joueurs. Dans les applications que nous verrons dans ce cours, les joueurs seront, par exemple, "une entreprise, ses banques et le marché financier", "les partis politiques", "les parents et leurs enfants", ou "les enchérisseurs à une enchère". Tout ce qui est pertinent dans le grand nombre de détails caractérisant ces joueurs sera résumé dans la description de leurs stratégies et leurs fonctions de paiement. En particulier, "un joueur" ne doit pas être une seule personne. Tout groupe d'individus ou toute institution possédant des intérêts identiques et agissant ensemble dans le jeu peut être considéré comme joueur.

Pour éviter toute ambiguïté par rapport à ces données cadre, il importe de spécifier précisément quelles sont les règles de l'interaction. Dans la première partie de ce cours nous supposerons les règles suivantes :

- Règle 1 : Les joueurs choisissent simultanément leur stratégie.
- Règle 2 : Les joueurs connaissent la forme normale.
- Règle 3 : Toute coordination formelle et engageante (par exemple la sélection conjointe d'une issue du jeu avec accord écrit) est impossible.
 En particulier, des règlements marginaux (qui permettent aux joueurs de partager les récompenses obtenues au jeu) ne sont pas possibles.

Les deux premières de ces propriétés sont normalement résumées en parlant des "jeux statiques à information complète". Pourquoi ces conventions? Une première réponse à cette question serait que ce sont les conventions les plus simples. Mais on en peut adopter d'autres, et en fait, à la deuxième partie de ce cours nous considérerons des jeux où les joueurs ne jouent pas simultanément (aux chapitres 6-9). Rentrent aussi dans le cadre de cette définition les situations où les joueurs ne connaissent pas toute la forme normale, mais nous n'avons pas l'espace de traiter cette partie de la théorie, relativement complexe, dans ce cours. En ce qui concerne le troisième point, celui-ci

¹En fait, concernant la règle 2, même dans le cadre de ce cours il est souvent suffisant

peut sembler plus contraignant qu'il ne le soit. En fait, si nous souhaitons modéliser une situation où les règlements marginaux parmi les joueurs, pour prendre cet exemple, peuvent jouer un rôle, nous devrions, en tant que modélisateur, inclure cet aspect stratégique dans la description du jeu, donc dans les ensembles de stratégies X_i . Dans ce nouveau jeu, obtenu de l'ancien jeu augmenté par des nouvelles stratégies, nous pouvons sans autre supposer que la troisième de nos conditions ci-dessus est satisfaite.²

La définition de la forme normale et la première règle ci-dessus peuvent donner l'impression que les interactions que nous considérons ici sont statiques. Bien que ce soit en fait le cas dans la plupart des exemples que nous étudierons dans ce chapitre, il est important de souligner que le cadre présenté ici est plus général. En particulier, un grand nombre de jeux dynamiques s'intègrent facilement dans ce cadre, comme le dernier des exemples suivants le montrera.

1.2 Exemples:

Etant les plus simples à décrire, nous donnons surtout des exemples de jeux à deux joueurs.

1) Le dilemme du prisonnier :

Ce jeu (inventé au début des années 50 par A. Tucker pour illustrer la théorie des jeux dans une conférence publique) est probablement le jeu le plus analysé des sciences sociales. Il décrit une situation stratégique qui est d'une grande pertinence dans beaucoup d'aspects de la vie économique, politique et sociale, ou en biologie. Il se traduit par la petite parabole suivante.

Deux suspects sont arrêtés et accusés d'un crime. La police ne dispose pas de preuves suffisantes pour faire condamner les suspects, à moins que l'un d'eux avoue. La police les maintient dans des cellules séparées et leur explique les conséquences de leurs actions possibles. Si aucun d'eux n'avoue, ils vont tous deux être jugés pour un délit mineur et condamnés à une peine

de supposer que tout joueur connaît sa propre fonction de paiement u_i . La règle 2 nous permet d'éviter une reflexion approfondie des conditions epistémiques en théorie des jeux (voir Aumann et Brandenburger, 1995).

²Une autre approche est prise dans la "théorie des jeux coopératifs". Dans cette approche, on prend comme élément primitif de la théorie les différentes coalitions et les paiements qu'elles peuvent achever, sans se demander comment ces coalitions se forment. Voire, par exemple, Moulin (1988).

1.2. EXEMPLES: 11

d'un an de prison. Si tous deux avouent, ils vont être condamnés à une peine de cinq ans de prison. Enfin, si l'un d'eux avoue et l'autre se tait, celui qui avoue sera libéré immédiatement, mais celui qui se tait sera condamné à une peine de huit ans de prison, cinq pour le crime et trois pour faire obstruction à la justice.

La représentation formelle de ce jeu selon les termes de la définition donnée ci-dessus est la suivante :

$$\mathcal{N} = \{ \text{prisonnier 1, prisonnier 2} \}$$
 $X_1 = X_2 = \{ \text{avouer, se taire} \}$
 $u_1(av., av.) = u_2(av., av.) = -5$
 $u_1(av., s.t.) = u_2(s.t., av.) = 0$
 $u_1(s.t., av.) = u_2(av., s.t.) = -8$
 $u_1(s.t., s.t.) = u_2(s.t., s.t.) = -1$

Pour les jeux finis (c.à.d. des jeux dans lesquels tout joueur a un nombre fini de stratégies) à deux joueurs il existe une manière bien disposée de décrire le jeu, celui de la matrice de paiements. Toute cellule d'une telle matrice correspond à une issue du jeu, et le premier nombre de toute cellule représente le paiement du premier joueur, le deuxième nombre celui du deuxième joueur. Le jeu suivant est équivalent au dilemme du prisonnier (le lecteur vérifiera qu'en échangeant "avouer" et "se taire" contre NC ("non-coopération") et C ("coopération") le dilemme stratégique des joueurs est le même qu'auparavant):

	С	NC
\Box	800	0
	800	1000
NC	1000	350
	0	350

Table 1.1 : Le dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier n'a pas seulement été étudié de façon théorique, il y a aussi une grande quantité de travaux empiriques en rapport avec ce jeu.

Qu'est-ce qui est la théorie des jeux empirique? Le premier outil empirique du théoricien des jeux est le laboratoire, souvent organisé autour d'un réseau d'ordinateurs. Dans un tel laboratoire on rassemble un groupe de personnes, on leur donne des instructions pour jouer le jeu qu'on veut étudier, on les laisse interagir, souvent de façon répétée, selon le dessin de l'expérience souhaité, et on les récompense finalement en espèce d'après les paiements qu'elles ont effectués durant le cours du jeu. Le choix des participants, la communication des instructions, la nature de l'interaction des sujets lors des répétitions du jeu et d'autres aspects de l'expérience suivent tous certaines règles établies en sciences sociales expérimentales que nous ne pouvons pas revoir ici.³

L'évidence empirique concernant le dilemme du prisonnier est d'une homogénéité étonnante. Ici nous reproduisons les résultats trouvés par Cooper, DeJong, Forsythe et Ross (1991), qui ont fait jouer le dilemme du prisonnier à un groupe de personnes de manière répétée en 20 rencontres aléatoires et anonymes. Ces résultats sont résumés dans la matrice ci-dessous :

Rencontre	Pourcentage de choix coopératifs (C)
1-5	43
6-10	33
11-15	25
16-20	20

Table 1.2 : Résultats de Cooper et al. (1991)

Ce tableau nous apprend plusieurs choses. Premièrement nous constatons qu'il y a de la diversité dans les comportements : il y a, même après plusieurs répétitions, des participants qui choisissent des stratégies différentes. Deuxièmement, la non-coopération, dès le premier tour, est plus importante que la coopération. Et troisièmement, semble-t-il, la non-coopération s'apprend. Dans ce cours nous tenterons d'illustrer tous ces phénomènes.

2) Le dilemme du prisonnier multilatéral :

Le problème fondamental illustré par le dilemme du prisonnier ne se limite pas aux interactions bilatérales. Au contraire, beaucoup d'exemples dans les sciences sociales montrent que le problème de la non-coopération inefficace

³Voire, par exemple, Kagel et Roth (1995).

1.2. EXEMPLES:

s'aggrave si le nombre de participants augmente. L'exemple classique est celui de la pollution : la situation de chacun est améliorée si tout le monde réduit ses activités polluantes à un niveau collectivement optimal, mais l'impact de chaque individu sur le résultat agrégé est faible, ci qui amène chacun à polluer trop.

Formellement, ce problème peut être décrit par des différentes généralisations du jeu décrit au point 1. Voici une possibilité radicale et simple, qui utilise la notation simplificatrice $x_{-i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$:

$$\mathcal{N} = \{1, ..., n\}, n \geq 2$$

$$X_i = \{C, NC\}, \text{ pour } i \in \mathcal{N}$$

$$u_i(C, x_{-i}) = \begin{cases} 800 & \text{si } x_{-i} \text{ contient au moins } 60 \% \text{ de } C \\ 0 & \text{si } x_{-i} \text{ contient moins que } 60 \% \text{ de } C \end{cases}$$

$$u_i(NC, x_{-i}) = \begin{cases} 1000 & \text{si } x_{-i} \text{ contient au moins } 60 \% \text{ de } C \\ 350 & \text{si } x_{-i} \text{ contient moins que } 60 \% \text{ de } C \end{cases}$$

Dans cet exemple, l'utilité de l'individu dépend de ce que font les 60 pour cent du groupe. Pour reprendre l'exemple de la pollution : si au moins 60 pour cent de la population réduisent l'utilisation de leurs voiture privée ("C"), l'effet sur la qualité de l'air est positive pour tout le monde, si moins que 60 pour cent se restreignent, l'air est mauvaise pour tout le monde.⁴

3) Bach ou Stravinski:5

L'histoire de ce jeu est de nouveau une histoire de deux personnes. Cette fois-ci il s'agit d'une femme et d'un homme qui ne se connaissent pas bien. Tous les deux aiment la musique et ils ont deux options pour sortir le soir : un concert de Bach ou un concert de Stravinski. Elle préfère Bach, il préfère Stravinski, mais avant tout, ils préfèrent passer la soirée ensemble. Leur grand problème est qu'ils ne peuvent pas communiquer durant la journée; ils travaillent dans des entreprises différentes et ils sont trop timides pour se téléphoner.

Pour la description formelle nous mettons $\mathcal{N} = \{\text{elle, lui}\}\ \text{et } X_{\text{elle}} = X_{\text{lui}} = \{B, S\}$. Les paiements sont représentés dans la matrice suivante.

⁴Evidemment, une modélisation plus réaliste choisirait une variable continue comme stratégie.

⁵Ce jeux est normalement appelé "la bataille des sexes", nom qui date des années 50. Osborne et Rubinstein (1994) ont suggéré ce nom, modernisant l'esprit de l'exemple tout en gardant l'abréviation "BoS".

	B	S
B	3	1
D	2	1
S	0	2
B	0	3

Table 1.3: Bach ou Stravinski

La situation type décrite dans cette matrice diffère grandement de celle du dilemme du prisonnier. Ici, aucune stratégie ne peut être éliminée a priori (ce qui est possible, selon les objectifs des participants, au dilemme du prisonnier), et il y a deux issues "raisonnables", (B,B) et (S,S) (en fait, ces deux issues sont les deux optima de Pareto de l'interaction). Cependant, les deux joueurs ont des avis contraires en ce qui concerne la sélection de ces deux issues.

4) La réunion de la commission :

Le début de la réunion d'une commission est fixé à 17 heures. La commission ne peut siéger efficacement que si tous ses membres sont présents. Tout membre de la commission décide de lui-même de son heure d'arrivée. Les intérêts des différents participants dans cette situation sont les suivants : Si un membre sait que les autres vont être à l'heure, il préfère être lui aussi à l'heure, car cela permet à la commission de terminer son travail suffisamment tôt pour le dîner. S'il sait que quelqu'un arrivera en retard, il préfère arriver plus tard lui aussi, histoire de ne pas perdre son temps à devoir attendre que tout le monde soit présent.

Pour le cas de deux participants avec deux actions (jeu 2×2) nous pouvons donner la représentation suivante.

	arriver	arriver
	à l'heure	en retard
à l'heure	10	0
a i neure	10	5
en retard	5	5
en retard	0	5

Table 1.4 : La réunion de la commission

1.2. EXEMPLES:

Cette situation a quelque chose en commun avec "Bach ou Stravinski", parce qu'il y a deux issues qui sont meilleures que les autres (sont des optima de Pareto), à savoir (à l'heure, à l'heure) et (en retard, en retard). Cependant, cette fois-ci les deux joueurs ont les mêmes préférences par rapport à ces deux issues : ils préfèrent tous les deux arriver ensemble à l'heure. Toutefois, si l'un des joueurs arrive en retard, l'autre préfère arriver en retard lui aussi.

Comment peut-on représenter cette situation, si la commission comprend plus que deux membres? En général, pour les jeux à trois joueurs ou plus, il n'y a pas de représentation aussi simple que la matrice des paiements. Cependant, dans le cas présent, on peut simplifier la présentation en notant que tous les joueurs ont la même fonction de paiement et le paiement d'un joueur donné ne dépend que du plus grand retard de tous les autres joueurs. On peut donc décrire tous les paiements par une matrice dont les lignes indiquent le choix du joueur donné et les colonnes le retard maximal des autres joueurs.

Ce type de jeux a été étudié à plusieurs reprises dans des laboratoires électroniques. Nous reproduisons ici une version du jeu testée par van Huyck, Battaglio et Beil (1990) où le choix d'un joueur correspond à un niveau d'"effort" (pour relier cet exemple au précédent, supposez que plus l'effort est grand et plus le retard est faible). Si les niveaux d'effort possibles sont donnés par 1, 2, ..., 7 (où 7 dénote l'effort maximal), les paiements d'un joueur donné peuvent être décrits par la matrice suivante :

valeur la plus faible choisie par un des joueurs

votre valeur choisie

Table 1.5 : La réunion de la commission généralisée

En laboratoire, van Huyck, Battaglio et Beil (1990) ont fait jouer ce jeu de façon répétée par des groupes d'environ 15 sujets expérimentaux, composés au hasard. Normalement, pour chaque groupe, il y avait 10 répétitions, à la fin desquelles l'effort minimal de ce tour a été annoncé publiquement, et les sujets ont été rémunérés d'après la matrice de la table 1.5 en cents américains. Les chercheurs ont conduit plusieurs fois de telles sessions, avec des participants différents. La graphique 1.1 montre l'évolution des issues de ce jeu durant une de ces sessions, relativement représentative.

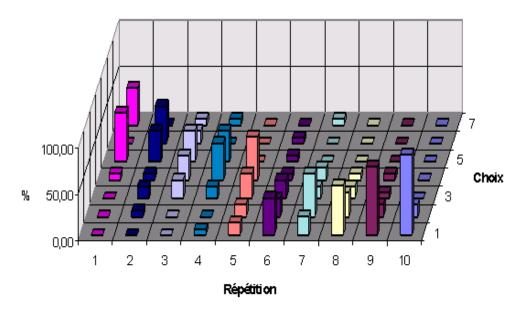


Fig. 1.1 – Un résultat de van Huyck, Battaglio and Beil (1990)

Nous laissons le lecteur interpréter ce graphique et en tirer des conclusions (peut-être plutôt pessimistes).

5) Jeux à somme nulle:

Le cas le plus évident des jeux à somme nulle est celui des jeux à deux joueurs. Dans ces jeux, les intérêts des deux joueurs sont strictement opposés, parce qu'à chaque issue le gain d'un joueur est égal à la perte de l'autre. Ce type de jeu, qui, en particulier, comprend les jeux de société et les modèles de guerre, a été étudié intensivement et presque exclusivement aux débuts

1.2. EXEMPLES: 17

de la théorie des jeux, jusqu'à ce qu'on commençait à partir des années 1950 à appliquer la théorie aux problèmes plus générales. 6

Formellement on a dans un jeu à somme nulle $u_1(x) + u_2(x) = 0$, pour tout $x \in X_1 \times X_2$. Graphiquement nous pouvons, de nouveau, représenter ce cas par une matrice dans le cas ou tout joueur a un nombre fini de stratégies à sa disposition (Table 1.6).

	y^1	y^2	 y^M
x^1	a_{11}	a_{12}	a_{1M}
	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$-a_{1M}$
x^2	a_{21}	a_{22}	a_{2M}
	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$-a_{2M}$
:			
x^{K}	a_{K1}	a_{K2}	a_{KM}
	$-a_{K1}$	$-a_{K2}$	$-a_{KM}$

Table 1.6 : Un jeu à deux joueurs et à somme nulle

6) Concurrence imparfaite en prix (concurrence à la Bertrand):

Ce jeu est un des exemples les plus connus et les plus simples de l'économie industrielle. On considère deux entreprises en situation de duopole sur un marché homogène. La fonction de demande sur ce marché est donnée par x(p) = a - bp, avec a, b > 0. Les coûts marginaux de production sont supposés constants et on les dénote par c_1, c_2 pour les deux entreprises. Les entreprises ont des capacités illimitées et décident simultanément du prix de vente. L'entreprise qui pose le prix le plus faible obtient toute la demande.

Une manière de mettre cette interaction sous forme normale est la suivante :

$$\mathcal{N} = \{ \text{firme 1, firme 2} \}$$
 $X_1 = X_2 = [0, \infty)$

⁶Les études de Emile Borel dans les années 1920s et le fameux article de John von Neumann de 1928, "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" ont été consacrés aux jeux à somme nulle. L'article de von Neumann a donné la première démonstration que tout jeu fini à somme nulle a un "équilibre" (voire section 2.3).

$$u_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (a - bp_i)(p_i - c_i) & \text{si } p_i < p_j, \ j \neq i \\ \frac{1}{2}(a - bp_i)(p_i - c_i) & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

Ici, $[0, \infty)$ dénote l'ensemble de tous les nombres réels non-négatifs. Une autre forme normale s'obtient si on modifie les ensembles de stratégies tel que $X_1 = X_2 = \{0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, ...\}$. Cette formulation tient compte du fait qu'en Suisse, par exemple, il est impossible d'annoncer des prix qui ne sont pas multiples de 5 centimes. On obtient encore une autre forme normale si on impose que les prix demandés soient inférieurs à 404 milliards francs suisses, ce montant représentant le produit national brut de la Suisse en $2000: X_1 = X_2 = \{0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, ..., 404, 000, 000, 000.00\}$.

Ces trois formulations, qui sont intuitivement très proches l'une de l'autre, diffèrent sur le plan formel. En effet, les deux premières en décrivent des jeux infinis, tandis que la troisième un jeu fini. En fait, la troisième version peut en principe être décrite par une matrice semblable aux matrices ci-dessus. Mais cette matrice aurait à peu près 40 billions de lignes et de colonnes.

7) Les échecs:

Tous les exemples précédents sont des jeux proprement "statiques" : chaque joueur intervient une et une seule fois. Cependant, comme il est mentionné plus haut, le concept de la forme normale comprend aussi des jeux dynamiques. Donnons ici l'exemple classique des échecs. Comme discuté à l'introduction, les échecs sont un jeu fini : toute partie arrive nécessairement à une fin, bien que le nombre de tours pour y arriver ne soit pas déterminé.

Qu'est-ce qu'une stratégie aux échecs? Comme défini plus haut, une stratégie est un plan complet comment jouer le jeu. Donc une stratégie pour les blancs peut commencer comme cela : "D'abord pion de e2 à e4. Si l'autre joue e7-e5, répond par d2-d4. Dans tous les autres cas répond par d2-d3. Si après 1. e2-e4, e7-e5, 2. d2-d4, l'autre avance le cavalier à f6 répond par d4-d5, s'il choisit d7-d6, répond par …", etc. En principe, il est possible de décrire le comportement d'un joueur complètement à l'avance de cette manière. Imaginons donc l'ensemble de toutes les stratégies des blancs, décrites de cette façon, et supposons qu'il ait M éléments. Faisons de même pour les noirs, ce qui donne, supposons, un ensemble de N éléments. Une rencontre des blancs utilisant la stratégie s^i , $i \leq M$, et des noirs utilisant la stratégie t^j , $j \leq N$, va produire une des trois issues possibles du jeu, à savoir "les blancs gagnent", "les noirs gagnent" ou "match nul". Les intérêts des deux joueurs dans ce

jeu sont très simples : chacun veut gagner, une victoire va au détriment de l'autre, et une victoire vaut plus qu'un match nul, qui en revanche est encore mieux qu'une perte. Donc nous pouvons attribuer la valeur de 1 à la victoire, la valeur de 0 au match nul, et -1 à une perte. La matrice du jeu d'échecs ressemble donc à une matrice du type suivant.

	t^1	t^2	t^3	t^4	 t^{N-1}	t^N
s^1	-1	1	0	1	0	1
3	1	-1	0	-1	0	-1
s^2	1	1	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	1	1	1	1
s^3	0	0	1	1	0	1
3	0	0	-1	-1	0	-1
s^4	1	0	0	0	0	1
3	-1	0	0	0	0	-1
:						
٠						
s^{M-1}	-1	-1	0	-1	-1	0
3	1	1	0	1	1	0
s^M	-1	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	0	-1

Table 1.7: Une représentation d'échecs

Cependant, tandis qu'il est clair que les échecs sont en principe représentables par une telle matrice, en ce moment personne ne connaît cette matrice. Et si quelqu'un la connaissait, il ou elle n'aurait pas les moyens de la noter, car on estime que cette matrice a entre 10^{15} et 10^{20} colonnes et lignes. En fait, les valeurs exactes de M et N ne sont pas connues jusqu'à présent. Donc la deuxième des règles que nous avons introduites au début de ce chapitre pour les jeux sous forme normales (information complète) n'est pas satisfaite. En fait, les superordinateurs à échecs de la première moitié des années 90 n'essaient pas vraiment de décrire la forme normale du jeu afin de trouver des stratégies gagnantes. Ils combinent plutôt la recherche "exhaustive", telle que représentée par la forme normale, avec un raisonnement plutôt extensif, qui

prend en considération des horizons différents et des évaluations stratégiques de ce que pourrait faire l'opposant. Mais le jour où les descendants de *Deep Blue* et *Deep Fritz* auront trouvé la forme normale, la fascination des échecs sera passée.⁷

1.3 Eléments d'une théorie du comportement stratégique rationnel

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, nous nous intéressons ici aux différentes formes de comportement rationnel dans un jeu. Par rationalité, nous entendons le souhait par un individu de maximiser sa fonction de paiement étant donné ce qu'il sait ou croit savoir de son environnement. Dans les problèmes à optimisation individuelle, tels qu'étudiés par exemple en recherche opérationnelle, il s'agit de trouver des stratégies qui maximisent la fonction de paiement d'un acteur face à un environnement mécanique. Peutêtre complexe en raison des mathématiques nécessaires pour sa résolution, ce problème est du moins bien défini. Mais dans les problèmes stratégiques, comme définis par la forme normale d'un jeu, la simple notion de maximisation de paiement n'a même pas de sens, parce que l'issue du jeu dépend de ce que tous les joueurs font.

La première question que nous devons nous poser est donc : comment donner un sens à l'idée que chaque joueur cherche à maximiser son paiement, sans accord explicite avec les autres, en connaissant uniquement les règles du jeu?

En principe, il y a deux approches possibles à cette question, qui sont polaires. A un extrême, on peut poser une approche "strictement individualiste": les joueurs ne raisonnent qu'en fonction de leur propre choix, en ignorant le comportement des autres joueurs. A l'autre extrême, il y a l'approche "entièrement stratégique": chaque joueur raisonne en vue de la totalité des choix stratégiques rationnels et plausibles de tous les joueurs.

Entre ces deux pôles, il y a toute une gamme d'approches à considérer. Sur

⁷Deep Blue est le programme qui a battu le champion du monde, G. Kasparov, en 1997, et Deep Fritz le programme qui a fait match nul contre le champion du monde W. Kramnik en 2002. D'ailleurs, la vision exprimée ci-dessus n'est pas aussi étrange qu'elle ne paraît en ce moment. A la fin des années 80, un ordinateur a complètement résolu le jeu d'enfant américain "Connect Four" dont la matrice a plus de 10⁶ colonnes et lignes (voir Allis, van der Meulen et van den Herik, 1989).

cette gamme, nous considérons d'abord une approche "très individualiste", pour nous orienter ensuite vers des approches plus stratégiques.

Pour définir cette approche, nous utilisons la notation suivante : pour i quelconque, $x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{-i} = X_1 \times ... \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times ... \times X_n$. X_{-i} dénote donc le choix de tous les joueurs autres que i.

Définition : Une stratégie x_i du joueur i domine strictement une stratégie \widehat{x}_i si $u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(\widehat{x}_i, x_{-i})$, pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$. Une stratégie est strictement dominée s'il existe une autre stratégie qui la domine strictement.

Si un joueur a une stratégie strictement dominée, il semble raisonnable (et rationnel) de supposer qu'il ne l'utilisera pas. En fait, la stratégie qui domine la stratégie en question lui donne un paiement strictement plus grand quel que soit le comportement des autres joueurs. Pour cette conclusion il ne nous faut aucune hypothèse sur la rationalité des autres joueurs. Le critère de ne pas choisir une stratégie strictement dominée est donc "individuellement raisonnable" pour un joueur, même s'il ne sait pas si les autres joueurs sont raisonnables ou pas.

A titre d'exemple le lecteur vérifiera que la stratégie "se taire" (ou C, dans la matrice de l'exemple 1 ci-dessus) dans le dilemme du prisonnier est strictement dominée par "avouer", cependant ni dans "Bach ou Stravinski" ni dans "La réunion de la commission" il n'y a de stratégie strictement dominée. En vue des résultats empiriques mentionnés à propos du dilemme du prisonnier, il est remarquable qu'il semble y avoir un certain nombre de personnes qui jouent une stratégie strictement dominée. Quelle pourrait être leur motivation? Nous reviendrons à cette question plus tard quand nous traiterons le dilemme du prisonnier dans un cadre dynamique (au chapitre 9).

La notion de dominance stricte peut donc nous servir comme "concept de solution" pour des jeux sous forme normale. Cette solution prévoit que les joueurs n'utilisent pas de stratégie strictement dominée; toutes les autres stratégies sont possibles. Malheureusement, ce concept de solution pose normalement peu de restrictions sur le comportement à adopter dans un jeu. Il y a des jeux dans lesquels cette approche donne des prédictions fortes, même uniques (comme dans le dilemme du prisonnier), mais généralement elle est trop faible. Par exemple, dans "Bach ou Stravinski" ou dans la "réunion de la commission", la dominance forte n'impose aucune restriction : toute issue

est possible. Par conséquent, dans les applications, surtout pour la politique économique, on a besoin de concepts plus restrictifs.

Pour cela, nous devons faire un pas dans la direction de l'approche "stratégique". Nous continuons à supposer que tout joueur est "raisonnable" (dans le sens où il ne choisit pas de stratégie strictement dominée). Si chaque joueur élimine les stratégies strictement dominées de son ensemble de stratégies X_i , nous avons effectivement une nouvelle forme normale, réduite, dont les ensembles de stratégies ne contiennent plus de stratégies strictement dominées par rapport à $X_1 \times ... \times X_n$. Appelons-la $(\mathcal{N}, \widehat{X}_1^1, ..., \widehat{X}_n^1, u_1, ..., u_n)$.

Mais attention, cette forme normale n'est pas connue par les joueurs! En fait, chaque joueur connaît seulement sa propre attitude vis à vis des stratégies dominées et non pas celle des autres. Peut-être qu'un autre joueur utilise une stratégie strictement dominée? Pour que la nouvelle forme normale soit connue par tous les joueurs (comme nous l'avons supposé dans la règle 2 sur le déroulement des jeux sous forme normale), il faut une hypothèse supplémentaire :

Hypothèse 1 : Tout joueur sait que tout joueur est "raisonnable" (dans le sens défini).⁸

Si cela est le cas, tout joueur peut (mentalement) reconstruire ce que les autres joueurs pensent vis-à-vis de leurs stratégies strictement dominées et, par conséquent, connaît la forme normale réduite. De plus, étant donné qu'il est "raisonnable" (dans le sens défini), tout joueur éliminera de son ensemble de stratégies \widehat{X}_i^1 les stratégies strictement dominées dans le nouveau jeu. On arrive donc à une nouvelle forme normale, $(\mathcal{N}, \widehat{X}_1^2, ..., \widehat{X}_n^2, u_1, ..., u_n)$, dont les ensembles de stratégies ne contiennent plus de stratégies strictement dominées par rapport à $\widehat{X}_1^1 \times ... \times \widehat{X}_n^1$. De nouveau, sous les hypothèses faites, les joueurs ne connaissent pas nécessairement cette forme normale. Pour que cela soit le cas, il faut faire un autre hypothèse supplémentaire :

Hypothèse 2 : Tout joueur sait que tout joueur connaît le jeu et que tout joueur sait que tout joueur est "raisonnable" (dans le sens défini).

L'hypothèse 2 est obtenu en mettant "Tout joueur sait que" devant l'énoncé joint "hypothèse 1 et règle 2". Notons que la règle 2 ("tout joueur connaît le jeu") n'implique pas que tout joueur sait que tout joueur connaît le jeu. Donc seulement si l'hypothèse 2 est vérifiée, chaque joueur connaît la nouvelle forme normale, réduite deux fois (c.-à-d. qu'il est sûr que les autres

⁸Si on ne suppose pas à priori que tout joueur connaît le jeu (règle 2), il faut le demander maintenant (autrement un joueur ne peut pas réfléchir à ce qu'un autre pense).

joueurs ont réduit leurs ensembles de stratégies comme décrit). Par conséquent, il peut éliminer les stratégies strictement dominées dans ce jeu, etc. Pour alimenter l'intuition, considérons un exemple :

	y^1	y^2	y^3
\mathbf{x}^1	3	8	2
X	1	0	6
\mathbf{x}^2	4	2	3
X	3	2	0
x^3	3	3	4
X	2	1	1
\mathbf{x}^4	2	5	1
A	0	5	2

Table 1.8 : Un exemple

Dans ce jeu, il y a une stratégie strictement dominée, à savoir x^4 . Dans le jeu réduit qui résulte de l'élimination de cette stratégie, $(\mathcal{N}, \widehat{X}_1^1, \widehat{X}_2^1, u_1, u_2)$, il y a une autre stratégie strictement dominée, y^2 . Si le joueur 2 élimine cette stratégie, on obtient la forme normale $(\mathcal{N}, \widehat{X}_1^2, \widehat{X}_2^2, u_1, u_2)$. Dans ce jeu, la stratégie x^1 est strictement dominée. Donc si nous supposons que tout joueur sait que tout joueur sait que tout joueur connaît le jeu et est "raisonnable" (dans le sens défini), nous obtenons une forme normale réduite avec $\widehat{X}_1^3 = \{x^2, x^3\}$ et $\widehat{X}_2^3 = \{y^1, y^3\}$. Pour qu'on puisse être sûr que les joueurs connaissent cette forme normale, il faut maintenant supposer que tout joueur sait que tout joueur sait que tout joueur connaît le jeu et est "raisonnable" (dans le sens défini), etc.

Si ce processus mental de "tout joueur sait que tout joueur sait que …que 'tel et tel est le cas"' peut être poursuivi jusqu'à l'infini, on dit que l'événement 'tel et tel' est en connaissance commune. Si donc la forme normale et la rationalité des joueurs (telle que définie) sont en connaissance commune, on peut répéter (et tout joueur va répéter) la procédure d'élimination autant de fois que possible. Le processus s'arrête après k itérations, si dans le jeu $(\mathcal{N}, \widehat{X}_1^k, ..., \widehat{X}_n^k, u_1, ..., u_n)$ aucun joueur n'a de stratégies strictement dominées. On appelle le jeu ainsi obtenu le jeu réduit par "élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées" (ESTSSD).

Plusieurs questions techniques se posent à ce point, telles que si le pro-

cessus d'élimination successive s'arrête toujours. Nous laissons ces questions ouvertes. Le concept de solution que nous avons donc obtenu par ces considérations est le suivant : les joueurs n'utilisent que des stratégies du jeu réduit par ESTSSD; toutes ces stratégies sont possibles. Comme le montre l'exemple ci-dessus, ce concept de solution est plus fort que le concept de la dominance stricte (non-itérée) discuté auparavant.

La discussion précédente de la connaissance commune et de l'élimination itérée de stratégies peut apparaître abstraite et académique. En fait, elle est d'une grande pertinence dans la vie pratique. Dans beaucoup de situations de la vie économique ou politique il ne s'agit pas seulement de savoir ce qui se passe, mais aussi ce que les autres croient qu'il se passe. Pour donner un exemple fameux, qui ne correspond pas parfaitement à l'analyse formelle précédente, mais qui est très similaire, considérons le problème des choix des stratégies de placement à la bourse. Certainement, une bonne stratégie de placement considérera le flux de futurs dividendes anticipées ("les valeurs fondamentales"). Mais de plus, au moins à court et moyen terme, tout investisseur considère l'évolution probable des cours, afin de pouvoir réaliser des gains de revente. Mais l'évolution des cours dépend d'une large mesure du comportement des autres investisseurs. Donc l'investisseur individuel est forcé à considérer ce que les autres investisseurs pensent de l'évolution des titres en question. Mais ces pensées, en revanche, porteront forcément sur les évaluations des titres par les autres investisseurs, etc.¹⁰

Revenons au jeu 1.8. Si nous remplaçons dans cette matrice la case (x^4, y^1) par $\frac{3}{0}$, on obtient un jeu pour lequel le jeu réduit par ESTSSD est égal au jeu original : l'itération s'arrête avant la première étape! Cependant, on retrouve dans ce jeu modifié que là aussi la stratégie x^4 du joueur 1 est peu attrayante en comparaison avec la stratégie x^1 : si le joueur 2 joue y^2 ou y^3 , x^4 rapporte strictement moins que x^1 , et si le joueur 2 joue y^1 , x^1 et x^4 donnent le même résultat au joueur 1. On a ainsi de nouveau l'impression que la stratégie x^4 est "pire" que x^1 .

Définition : Une stratégie x_i du joueur i domine faiblement une stratégie \widehat{x}_i si $u_i(x_i, x_{-i}) \ge u_i(\widehat{x}_i, x_{-i})$ pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$ et si au moins une inégalité

⁹Sans autre réflexion, il est clair que le processus va s'arrêter après un nombre fini d'itérations si le jeu est fini. Dans les jeux infinis les choses sont moins claires.

¹⁰Le lecteur plus avancé trouvera une analyse excellente de ce problème dans l'article de Biais et Bossaerts (1998).

est stricte.

Quelle est la différence entre ces deux notions de dominance? Evidemment, la deuxième est plus faible que la première. Pour voir la différence plus clairement, appelons "croyance" du joueur i ce qu'il croit que les autres joueurs vont jouer (formellement, une croyance est une distribution de probabilité sur X_{-i}). Alors la différence entre dominance stricte et faible est la suivante :

- Pour une stratégie strictement dominée, il n'y a pas de croyance telle que la stratégie soit une réponse optimale à cette croyance.
- Pour une stratégie faiblement mais pas strictement dominée, il y a au moins une croyance telle que la stratégie soit une réponse optimale à cette croyance.

Sur le plan théorique il existe donc une différence non-négligeable entre ces deux concepts. Cependant, dans les applications, on considère normalement les stratégies faiblement dominées comme étant aussi "déraisonnables" que les stratégies strictement dominées, et on les ignore. Malheureusement ce concept est encore relativement faible : dans les jeux de "Bach ou Stravinski" ou dans "La réunion de la commission" aucune stratégie n'est faiblement dominée.

Plus généralement on peut ici aussi définir un processus de réduction analogue à celui défini pour les stratégies strictement dominées. Le jeu ainsi obtenu est appelé "le jeu réduit par élimination successive de toutes les stratégies faiblement dominées" (ESTSFD).

Comme dans le cas de l'ESTSSD, le concept de l'ESTSFD est un concept stratégique : chaque joueur réfléchit à ce que les autres joueurs pourraient faire et surtout à ce qu'ils pourraient penser. Le choix d'une stratégie dans \hat{X}_i^2 (ou l'ensemble correspondant pour l'ESTSFD) indique que le joueur i croit que le choix de $x_j \notin \hat{X}_j^1$ pour le joueur $j \neq i$ est impossible. Dans ce sens le choix de ce joueur est stratégique (une meilleure réponse au comportement anticipé des autres joueurs).

Les concepts de dominance discutés ici sont les plus simples. Il y en a encore plusieurs autres, tels que la dominance par stratégies mixtes (voir le chapitre 3), la dominance en équilibre, ou l'élimination partielle de stratégies dominées. Cette dernière mérite un bref commentaire. Ci-dessus nous avons exigé qu'à chaque tour d'élimination de stratégies toutes les stratégies dominées soient éliminées. Bien que cela paraisse raisonnable en général, il

y a des jeux où on trouve facilement des stratégies dominées, mais où il est beaucoup plus difficile de les trouver toutes. A cause de cela, on considère souvent les procédures "d'élimination partielle successive de stratégies strictement/faiblement dominées", où à chaque tour on élimine au moins une stratégie dominée, mais pas nécessairement toutes. Malheureusement, il se trouve que dans le cas des stratégies faiblement dominées, avec cette "itération lente" le résultat du processus peut dépendre de l'ordre et de la vitesse de l'élimination (la question 1.2 à la fin de ce chapitre en donne un exemple). Il est donc opportun de prendre un peu de précaution dans ce cas. Ce problème ne se pose pas pour les stratégies strictement dominées.

Considérons maintenant une toute autre approche des jeux sous forme normale, qui est de nouveau une approche "individualiste" (du fait que le comportement des autres joueurs est négligé). Cette approche peut être appelée pessimiste, parce qu'on suppose que les joueurs envisagent toujours le pire des cas.

Dans un jeu sous forme normale finie, une stratégie x_i donne au joueur i au moins

$$p(x_i) = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} u_i(x_i, x_{-i}),$$

où $p(x_i)$ est "le pire avec x_i ". Alors, le paiement garanti maximal du joueur i est égal à

$$\max_{x_i} p(x_i) = \max_{x_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} u_i(x_i, x_{-i})$$

(le "paiement maximin").

Définition : Une stratégie \overline{x}_i d'un joueur i est appelée prudente si elle lui donne toujours au moins son paiement garanti maximal :

$$u_i(\overline{x_i}, x_{-i}) \ge \max_{x_i} p(x_i)$$
 pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$.

Jouer une stratégie prudente peut correspondre à un besoin de sécurité : le joueur imagine que les autres joueurs conspirent contre lui et se mettent d'accord de ne lui faire obtenir que le paiement minimal possible pour tout ce qu'il fait. Mais cela est rarement un comportement très convaincant : par pessimisme, le joueur ignore normalement certains aspects des choix des

autres joueurs qui pourraient lui être avantageux. En plus, de nouveau, le concept n'a souvent pas beaucoup de puissance de prédiction.

Malgré cela, le concept de stratégies prudentes est important pour deux raisons :

- Dans les jeux à deux joueurs et à somme nulle le concept est puissant.
- Le paiement garanti maximal fournit une borne en-dessous de laquelle le paiement d'un joueur rationnel ne descend en aucun cas. Cette propriété se révélera importante pour la discussion de la coopération dans les jeux répétés, plus loin dans le cours (voir le chapitre 9).

Pour voir les limites du concept des stratégies prudentes et aussi leur importance dans les jeux à deux joueurs et à somme nulle, considérons deux exemples.

	Joueur 2					
		1	2	3	4	5
	1	2	4	5	2	4
		-2	-4	-5	-2	-4
Joueur 1	2	-4	-6	-8	-8	-10
Joueur 1		4	6	8	8	10
	3	2	3	4	0	5
	J	-2	-3	-4	0	-5
	4	-1	-10	0	-4	-6
	4	1	10	0	4	6

Table 1.9 : Un jeu à somme nulle

Le premier exemple est le jeu de la table 1.9, qui est un jeu à somme nulle. Dans ce jeu, le joueur 1 a une seule stratégie prudente, la stratégie 1, et le joueur 2 en a deux, les stratégies 1 et 4. En guise d'interprétation, remarquons d'abord que la prédiction est relativement précise, mais pas unique : on peut s'attendre à l'une des deux issues (1, 1), (1, 4). Mais deuxièmement, on remarque que pour tout joueur, les deux couples de stratégies prudentes donnent le même paiement. Du point de vue de chaque joueur, son choix de stratégie prudente et le choix (de stratégie prudente) de son adversaire importent peu (en fait pas du tout). La troisième observation est liée à la deuxième et est la plus importante. Imaginons un processus de communication informelle préalable au jeu pour établir que le "pessimisme" est connaissance commune (comme défini auparavant). Dans ce cas, il n'y a pas de raison

pour l'un ou l'autre des joueurs de choisir une stratégie non-prudente. Donc pour ce jeu,

- L'ambiguïté de prédiction n'a aucune conséquence; du point de vue des joueurs et de l'observateur, les stratégies prudentes sont interchangeables.
- Chacune des deux prédictions est "stable" : une fois proposée aux deux joueurs, aucun joueur n'a de raison de dévier de cette suggestion.

Le deuxième exemple est une modification du jeu 1.8 :

	y^1	y^2	y^3
x^1	3	8	3
	0	1	6
x^2	4	2	3
	3	0	1
x^3	3	3	4
	2	2	1
4	2	5	1
x^4	0	5	2

Table 1.10 : Un autre exemple

Pour le jeu 1.10 le jeu réduit par ESTSFD est composé encore des ensembles de stratégies $\{x^1, x^2, x^3\}$ et $\{y^1, y^2, y^3\}$: la puissance de prédiction de ESTSFD n'est pas grande. Les stratégies prudentes sont x^1, x^3 pour le joueur 1 et y^3 pour le joueur 2. Les stratégies prudentes donnent donc une prédiction plus puissante que les concepts de dominance.

Mais supposons maintenant que le joueur 2 soit informé d'avance du choix du joueur 1. (Rappelons l'idée principale du concept des stratégies prudentes : le joueur 1 croit que le joueur 2 essaie de maximiser le dommage du joueur 1, qu'il veut le "punir"). Dans ce cas le joueur 2 au moment de "jouer" (x^3, y^3) (presser le bouton qui déclenche son action) a une incitation à dévier et à jouer y^1 à la place de y^3 , parce que cela lui rapporte plus. La situation est similaire pour le joueur 1 dans l'issue (x^1, y^3) .

La raison pour ces comportements est claire : Si chaque joueur sait que tout joueur est "pessimiste", alors il n'a plus de raison de l'être. Le joueur 2, en sachant que le joueur 1 est pessimiste (joue x^3), peut être plus optimiste et choisir y^1 . En d'autres termes, l'hypothèse de comportement pessimiste du

joueur 1 n'est dans ce cas pas compatible avec l'hypothèse de comportement pessimiste du joueur 2. Dans ce sens, la prédiction (x^3, y^3) n'est pas "stable".

Le premier des deux exemples vu précédemment montre que pour certains jeux les stratégies prudentes, bien que définies en termes "individualistes" peuvent avoir une propriété stratégique forte : si le comportement des autres joueurs est connu (par information informelle, expérience, ...), aucun joueur n'a une incitation à changer unilatéralement sa stratégie. Le deuxième des deux exemples ci-dessus montre que les stratégies prudentes ne satisfont pas toujours ce critère. Si nous voulons le formuler pour des jeux plus généraux, il faut abandonner l'approche individualiste.

Définition : Une issue $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ d'un jeu sous forme normale est un équilibre de Nash si

$$u_i(x^*) \ge u_i(x_i, x_{-i}^*)$$
 pour tout $x_i \in X_i$ et tout i . (1.1)

Cette expression traduit ainsi qu'étant donné les stratégies des autres joueurs, aucun joueur ne peut obtenir strictement plus en déviant de sa stratégie d'équilibre. La perspective de cette définition est plus stratégique que celle des définitions précédentes. Bien que les joueurs ne considèrent pas les motivations des autres joueurs, ils réagissent à leurs stratégies de manière optimale. Avant de discuter ce concept, revenons à nos exemples standard.

En comparant directement les différentes issues, nous voyons que le seul équilibre de Nash du "dilemme du prisonnier" (Table 1.1) est l'issue non-coopérative, (NC,NC). Bien que cette issue soit inférieure à l'issue (C,C) pour tout joueur, aucun joueur n'a intérêt à en dévier unilatéralement. De façon similaire on s'aperçoit que (B,B) et (S,S) sont les deux équilibres de Nash dans "Bach ou Stravinski" (Table 1.3), et chaque issue sur la diagonale de la matrice 1.5 est un équilibre dans la "réunion de la commission".

Pour étudier le dernier de nos exemples introductifs, le jeu de la concurrence à la Bertrand, supposons d'abord que les ensembles de stratégies soient continues $(X_1 = X_2 = [0, \infty))$ et que les deux firmes aient des coûts marginaux identiques $(c_1 = c_2)$. Est-ce possible qu'à l'équilibre les deux firmes choisissent des prix différents? Dans ce cas la firme qui demande le prix le plus bas peut légèrement augmenter son prix sans perdre le marché et ainsi gagner strictement plus qu'auparavant. Etant donné la stratégie de l'autre firme, ceci constitue une déviation strictement profitable, ce qui montre que la situation initiale ne constituait pas un équilibre. Si, d'un autre côté, les

deux firmes choisissent un prix identique mais supérieur à leurs coûts marginaux, chaque firme a intérêt à dévier : en demandant un prix légèrement inférieur mais quand même supérieur à c_i , elle obtient tout le marché (ce qui constitue un gain important) et elle perd très peu par unité vendue. De nouveau, la situation initiale ne peut avoir été un équilibre. Qu'en est-il si les deux firmes demandent un prix identique mais inférieur à leurs coûts marginaux? Clairement, dans cette situation de pertes, chaque firme veut maintenant dévier vers le haut et laisser le marché ruineux à l'autre firme. Il reste la situation $p_1 = p_2 = c_i$, où les deux firmes se partagent le marché et font des profits nuls. Maintenant, pour aucune firme une déviation n'est profitable, ni vers le haut, à $p_i > c_i$ (on obtient zéro au lieu de zéro, ce qui ne constitue pas une amélioration stricte), ni vers le bas, à $p_i < c_i$, où on obtient le marché, mais seulement en faisant des pertes. Nous avons donc identifié l'issue $p_1 = p_2 = c_i$ comme équilibre unique de ce jeu.

Considérons le cas de coûts marginaux asymétriques, par exemple $c_1 < c_2$. Dans ce cas, il est impossible qu'à l'équilibre la firme plus efficace (la firme 1) choisisse un prix plus élevé que, ou égal à, celui de l'autre firme. Parce que dans cette situation la firme 2 obtiendrait une partie du marché, il serait nécessaire que $p_2 \geq c_2$ (autrement la firme 2 ferait des pertes, ce qu'elle peut éviter en posant $p_2 > p_1$). Mais comme $c_1 < c_2$, la firme 1 pourrait vendre légèrement plus bas que la firme 2 pour obtenir tout le marché et faire des profits plus élevés. Donc nous savons que, à l'équilibre, $p_1 < p_2$; ce qui implique que la firme 1 obtient tout le marché. Clairement $p_1 \geq c_1$ (la firme veut éviter des pertes). Mais une telle issue ne peut pas être un équilibre non plus : étant donné p_2 , au lieu de poser p_1 la firme 1 peut poser, par exemple, $(p_1 + p_2)/2$, ce qui est plus grand que p_1 mais plus faible que p_2 et lui rapporte donc des profits strictement plus élevés.

Nous avons ainsi démontré que le jeu de Bertrand asymétrique, avec des ensembles de stratégies continues, n'a pas d'équilibre de Nash. Cet exemple montre, en particulier, que le concept d'équilibre de Nash peut être plus contraignant que ceux considérés auparavant. Le concept exige davantage (impose des conditions plus contraignantes), mais à tel point qu'il se peut qu'aucune issue ne satisfasse les critères posés. Nous avons vu que les concepts de dominance et de prudence n'avaient normalement pas assez de pouvoir de prédiction - avons-nous exagéré dans l'autre direction avec ce nouveau concept? Nous reviendrons à cette question au chapitre 3.

Avant de considérer des exemples un peu plus complexes, quelques premières remarques interprétatives à propos du concept de l'équilibre de Nash peuvent être utiles. Ces remarques sont préliminaires et incomplètes; tout au long du cours, ce concept, qui est le plus important de la théorie des jeux, va être repris et approfondi.

Notons d'abord qu'un équilibre de Nash respecte une certaine stabilité interne : si tout joueur joue une stratégie d'équilibre, il ne regrettera pas son choix de stratégie quand il apprendra l'issue du jeu. Dans ce sens, la propriété d'équilibre de Nash est une condition nécessaire pour qu'un accord informel dans une interaction stratégique soit réalisable. Plus généralement, si dans un contexte d'interaction multilatérale, les participants ont connaissance du comportement collectif (par exemple par expérience), il semble raisonnable de supposer que ce comportement satisfait le critère de Nash. Autrement ce comportement porterait déjà la graine de sa propre réfutation en soi. En d'autres mots encore, un équilibre de Nash peut être interprété comme étant une prophétie créatrice : si tout le monde y croit, tout le monde fait en sorte qu'elle soit réalisée.

Cependant, nous n'avons rien dit sur les mécanismes qui mènent les joueurs à jouer un équilibre de Nash spécifique. En fait, on suppose normalement que l'issue est connue par les joueurs (p.ex. : par communication informelle ou expérience) et on vérifie seulement sa stabilité interne. Cette approche laisse ouverte la question importante de la "stabilité externe" de l'équilibre, qui demande pourquoi une issue d'équilibre est choisie au lieu d'une autre. Nous revenons à cette question dans les chapitres 3 et 5.

Une autre question, que nous ne traitons pas systématiquement, est celle du calcul effectif d'un équilibre si le jeu est complexe. Comme nous le verrons à maintes reprises, trouver les équilibres d'un jeu plus complexe constitue toujours un certain travail et est de temps en temps un art.¹¹ Pour la recherche numérique des équilibres, il est utile d'introduire le concept de la "meilleure réponse" d'un joueur :

$$B_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i; u_i(x_i, x_{-i}) \text{ est maximal}\}.$$

L'ensemble $B_i(x_{-i})$ est l'ensemble de toutes les stratégies du joueur i qui représentent une meilleure réponse aux comportement collectif x_{-i} des autres joueurs. Alors, x^* est un équilibre de Nash si et seulement si

¹¹Pour plus d'information sur ce côté de la théorie des jeux (qui est surtout un problème des mathématiques appliquées et de l'informatique), voire, par exemple, McKelvey et McLennan (1996) et von Stengel (1996).

```
x_1^* est une meilleure réponse à (x_2^*,..., x_n^*), et \vdots x_n^* est une meilleure réponse à (x_1^*,...,x_{n-1}^*).
```

En conséquence, "calculer" les équilibres de Nash équivaut à calculer les meilleures réponses de tous les joueurs à eux-même. Pour rendre cette expression plus compacte (et plus suggestive), on écrit normalement (pour une issue $x=(x_1,...,x_n)$ donnée) $B_i(x)$ à la place de $B_i(x_{-i})$ et on dénote $B(x)=B_1(x)\times...\times B_n(x)$. Comme cela, on peut écrire la condition d'équilibre (1.1) comme $x^*\in B(x^*)$: l'issue x^* est une meilleure réponse à soi-même.

33

Problèmes 1.4

Question 1.1:

Modélisez la négociation de salaire entre la direction d'une entreprise et les représentants des employés (ou entre le patronat et le syndicat) par un jeu sous forme normale et commentez les "solutions" possibles.

Question 1.2:

Considérez le jeu sous forme normale à deux joueurs, donné par la matrice de paiement suivante :

Joueur 2					
		\mathbf{a}	b	\mathbf{c}	d
	A	1	4	1	3
	Λ	0	1	2	1
Joueur 1	В	2	4	1	2
		2	2	1	2
	\overline{C}	3	4	0	4
		1	1	1	0
		1	2	1	2
	D	3	2	1	$\frac{1}{2}$

- 1. Déterminez les stratégies prudentes des deux joueurs.
- 2. Déterminez le jeu réduit par ESTSSD.
- 3. Déterminez le jeu réduit par ESTSFD.
- 4. Supposons maintenant que dans les itérations d'élimination il n'est pas nécessaire d'éliminer toutes les stratégies faiblement dominées à chaque tour. Au lieu de cela, à chaque tour seulement une des stratégies faiblement dominées dans le jeu est éliminée, s'il y en a plusieurs. Réalisez une telle procédure d'éliminations successives pour le jeu donné. Qu'en pensez vous?

Question 1.3:

Considérez le marché d'un bien homogène, sur lequel deux producteurs se font concurrence (il s'agit donc d'un duopole). Les deux producteurs ont les mêmes coûts de production, linéaires et sans coûts fixes, donnés par $C_i(q_i)$

 $4q_i$, où q_i est la quantité produite par le producteur i. La demande sur le marché est décrite par la fonction

$$p = \begin{cases} 20 - Q, & \text{si } Q \le 20 \\ 0, & \text{si } Q > 20, \end{cases}$$

où p est le prix réalisé sur le marché et $Q=q_1+q_2$ la quantité totale offerte par les deux producteurs. Les producteurs produisent simultanément les quantités qu'ils veulent vendre, et le prix sur le marché s'ajuste de manière à ce que tout soit vendu.

- 1. Décrivez l'interaction entre les deux producteurs comme jeu sous forme normale.
- 2. Y a-t-il des stratégies qui sont strictement dominées dans ce jeu? Si non, pourquoi, si oui, lesquelles? (Pour résoudre ce problème, il peut être utile mais il n'est pas nécessaire de considérer graphiquement la fonction de profit d'un producteur pour différentes possibilités de comportement de l'autre).
- 3. Supposez qu'aucun producteur n'utilise des stratégies strictement dominées et que tout producteur sache que l'autre n'en utilise pas non plus. Y a-t-il des stratégies qui ne sont pas utilisées dans cette situation? Si non, pourquoi, si oui, lesquelles?
- 4. Déterminez le jeu réduit par l'élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées. Interprétation?
- 5. Supposez maintenant qu'il y ait trois producteurs sur le marché, tous avec la même technique de production. Répondez aux parties 2 et 3 pour cette nouvelle situation.

Chapitre 2

Application: Les enchères

2.1 Quelques remarques générales

Dans les économies modernes, les enchères sont parmi les mécanismes les plus importants pour allouer des ressources. Cependant dans la vie quotidienne, les individus sont rarement confrontés à ce genre de mécanisme. Pour le ménage moyen, le mécanisme de marché, par lequel les biens sont échangés selon un système anonyme de prix, domine la vie de tous les jours. Au mécanisme de marché s'ajoutent les transferts (par exemple, des contributions versées ou reçues de la sécurité sociale), le marchandage (pour des grandes acquisitions telles les maisons) et des files d'attentes (par exemple pour des billets de ballet). Ces mécanismes se placent probablement en seconde, troisième et quatrième position. Les enchères sont d'importance secondaire dans cette liste. Toutefois, dans de nombreuses transactions, les enchères sont très importantes.

Par exemple, la plupart des acquisitions importantes du secteur public se font par des enchères, en particulier, les dépenses publiques pour les grands projets de défense et de génie civil. La procédure se compose en général d'une invitation à enchérir qui est publiée dans la presse à grand public ou spécialisée. De façon similaire, les enchères sont utilisées pour la vente de propriétés publiques, à l'exemple des véhicules usés de la Poste ou d'autres entreprises d'Etat. On peut citer également la vente des entreprises d'Etat dans les pays d'Europe orientale anciennement communistes. La plupart de

¹Pour plus d'informations sur les achats de défense, voir par exemple Fox (1988).

ces privatisations se sont faites par des offres publiques.² Un autre exemple similaire est l'émission d'obligations du gouvernement. Dans la plupart des pays, le gouvernement place sa dette par des enchères ouvertes à un groupe sélectionné de banques d'investissement. Celles-ci distribuent ensuite les obligations aux investisseurs. Dans le domaine de la politique monétaire, nous pouvons mentionner la provision de crédit à court terme que les banques centrales font aux banques d'affaires. Dans ces opérations, le type d'enchère utilisé peut être primordial pour le succès de la politique monétaire, comme l'a démontré l'expérience de la banque centrale européenne, qui a changé en août 2000 son format d'enchère après des longues délibérations.³

De manière complètement différente, des exemples d'enchères certainement plus familiers sont celles d'oeuvres d'art et de bijoux, où l'on trouve comme acteurs principaux les deux grandes maisons britanniques Sotheby's et Christie's. La taille de ce marché est impressionnante. Ainsi, en 1997, le chiffre d'affaire de Sotheby's a été de 2.7 milliards de francs suisses. Un autre exemple de biens vendus aux enchères est la vente de vin en gros aux enchères. La plupart des grands producteurs de vin, comme les grands domaines de Bourgogne, de Bordeaux ou même la ville de Lausanne, mettent leur production aux enchères une ou deux fois par année, au lieu de la vendre aux détaillants à des prix fixes. Les célèbres "Hospices de Beaune", en Bourgogne, ont vendu leur vin pendant des siècles sous accord privé, jusqu'à ce que cette pratique soit abandonnée durant la Révolution Française. Dès lors, les Hospices ont tenu une enchère annuelle.

Un dernier exemple d'enchères, qui a rendu célèbre la théorie des enchères en public, est la vente des concessions pour l'utilisation du spectre de radiocommunication, par la Commission Fédérale de la Communication (FCC) des Etats-Unis. Traditionnellement, les droits d'utiliser les fréquences radio pour l'usage privé ont été assignés par la FCC sur décision administrative ou

²Pour plus d'informations sur la privatisation en Europe orientale, voir par exemple Bolton et Roland (1992).

³Pour plus d'informations sur les enchères du ministère des finances, voir par exemple Bartolini et Cottarelli (1997). L'article de Friedman (1991) est une référence classique.

⁴La plupart des affaires sur ce marché est réalisée dans les maisons d'enchères à Londres et à New York. Historiquement, Genève a toujours joué un rôle important dans le marché des bijoux et des montres, et a conservé cette position jusqu'à ce jour. Le huitième du chiffre d'affaires de Sotheby's en 1997 a été réalisé en Suisse.

⁵L'enchère utilisée par les Hospices est et a toujours été une "enchère au premier prix sous pli cacheté avec prix de réservation". Nous discutons de cette enchère ci-dessous. Pour une introduction à l'économie des enchères de vin actuelles, voir Ashenfelter (1989).

par loterie. Cependant, à la fin des années 1980, la demande pour ces droits est devenue si forte, surtout à cause du développement de nouveaux services de communication personnelle (PCS), comme le téléphone mobile, pour lesquels ces droits avaient une grande valeur. Après quelques hésitations, et beaucoup d'activité au sein de la FCC, le Congrès des Etats-Unis a voté une loi en 1993, qui donne à la FCC l'autorité de définir et tester plusieurs méthodes alternatives pour vendre de façon concurrentielle aux fournisseurs des PCS les droits d'utilisation de fréquence. Cela dans le but d'obtenir une utilisation efficace et intensive du spectre électromagnétique. Après une période préparatoire intense durant laquelle quelques théoriciens des jeux parmi les plus célèbres ont été consultés en tant que conseillers soit du gouvernement soit des entreprises participant aux enchères, la première grande enchère du spectre radio a été tenue entre décembre 1994 et mars 1995 et a rapporté approximativement \$ 7.7 milliards pour la moitié du spectre disponible. 6 Dès lors, les enchères pour la distribution du spectre ont été utilisées plus systématiquement. En 2000, elles sont devenues célèbres aussi en Europe, où les ventes aux enchères des concessions de radiocommunication dites "de la troisième génération" (UMTS) ont rapportées environ 60 milliards de francs suisses au gouvernement britannique et 81 milliards de francs au gouvernement allemand.⁷

Venons maintenant à l'étude plus analytique des enchères et aux deux groupes de joueurs dans ce contexte. Pour les enchérisseurs, la question clé se définit clairement : comment acquérir l'objet avec le moindre enjeu? Par contre, pour le vendeur (ou le commissaire-priseur engagé par lui), la question la plus importante est normalement de maximiser le revenu de l'enchère. La question est donc quel type d'enchère faut-il utiliser, et plus généralement, comment celle-ci se définit. L'expérience italienne de la vente aux enchères des concessions UMTS en octobre 2000 montre l'importance de cette question, car l'enchère italienne n'a rapporté "que" 18 milliards de francs, la moitié

⁶Comme le Fortune Magazine l'a écrit : "a triumph, not only for the FCC and the tax-payers, but also for game theory (and game theorists)." La FCC offre l'ensemble complet des données d'enchères sur son serveur web à l'adresse www.fcc.gov. Pour plus d'informations sur les enchères des SCP, voir McMillan (1994) et McAfee et McMillan (1996), d'où proviennent les citations ci-dessus.

⁷La vente aux enchères des 4 concessions offertes par le gouvernement suisse, organisée par l'Office fédérale de la communication, a été annullée par manque de concurrents au dernier moment le 13 novembre 2000. L'enchère a eu lieu quelques semaines plus tard sans modifications du cadre initialement prévu et a rapporté 205 millions de francs, 5 million au-dessus des soumissions initiales minimales de 200 millions.

du montant qui avait été planifié par le gouvernement. Voici un aperçu nonexhaustif des enchères les plus simples et les plus connues que l'on peut rencontrer (les enchères UMTS sont souvent un peu plus complexes).

- L'enchère au premier prix : les enchères sont soumises sous pli cacheté et l'objet est attribué au plus offrant ; le prix est égal à l'enchère la plus élevée.
- L'enchère au second prix : les enchères sont soumises sous pli cacheté et l'objet est attribué au plus offrant ; le prix payé par le vainqueur est égal à la valeur de la seconde enchère.
- L'enchère anglaise : le commissaire-priseur annonce un prix et invite des enchères orales qui augmentent progressivement. L'objet est acquis par l'enchérisseur faisant la dernière offre, qui est aussi le prix payé par le vainqueur.
- L'enchère hollandaise : le commissaire-priseur annonce un prix très élevé, puis descend progressivement. L'objet est acquis par le participant qui intervient le premier et au prix auquel le processus est arrêté.
- La surenchère : Les enchères sont orales et progressives comme à l'anglaise. L'enchère la plus élevée obtient l'objet, mais toutes les enchères sont perdues, même les non-gagnantes.

Chaque enchère de cette liste peut être assortie par des éléments divers, tels qu'un prix d'accès auquel les participants doivent s'acquitter afin de pouvoir prendre part à l'enchère. On peut également fixer un prix de réservation qui est un prix au-dessous duquel les objets en question ne sont pas vendus. Plus généralement, pour façonner une enchère dans une situation donnée, il faut considérer des questions telles que :

- 1. Qui a le droit de participer à l'enchère?
- 2. Quelles mises sont admises?
- 3. Comment les joueurs soumettent-ils leurs enchères (par exemple, simultanément, dans un ordre prédéterminé ou autre)?
- 4. Comment le vainqueur est-il déterminé?
- 5. Comment le prix payé par le vainqueur est-il déterminé?
- 6. Quels sont les montants payés par les enchérisseurs non-gagnants?

Si on considère une enchère comme un jeu stratégique, comme nous le ferons ici, la première de ces questions se réfère donc à l'ensemble des joueurs dans le jeu, la deuxième et troisième à leurs ensembles de stratégies et les trois dernières à leurs fonctions de paiement.

A titre d'exemple, nous allons nous pencher de façon plus détaillée sur deux types d'enchères. Ces analyses sont utiles pour illustrer le raisonnement dans les jeux sous forme normale. Cependant, elles ne touchent que la surface de la théorie des enchères, car celles-ci peuvent être analysées à fond uniquement dans un cadre d'information asymétrique, ce qui dépasse nos moyens à ce stade du cours.

2.2 L'enchère au premier prix

Pour décrire l'enchère au premier prix, nous considérons le modèle suivant. Il n'y a qu'un seul objet mis à l'enchère. \mathcal{N} , l'ensemble des joueurs, décrit les n enchérisseurs participant à l'enchère. Leurs stratégies possibles sont des multiples d'un montant minimal, par exemple 5 centimes, l'unité de paiement minimale légale en Suisse. Si on dénote cette unité minimale par ε et si on suppose que les joueurs n'ont pas de limite budgétaire, ce qui rend l'analyse beaucoup plus facile, on a :

$$X_1 = \dots = X_n = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon..\}$$
.

Pour la description des fonction de paiements des joueurs nous supposons que celles-ci sont données par une comparaison simple entre le prix et le montant maximal que l'enchérisseur est prêt à payer. Les règles de l'enchère décrites ci-dessus sont donc retranscrites par les fonctions de paiements suivantes :

$$u_{i}(x_{1},...,x_{n}) = \begin{cases} v_{i} - x_{i} & \text{si } x_{i} > \max\{x_{j} ; j \neq i\} \\ \frac{1}{m}(v_{i} - x_{i}) & \text{si } x_{i} = \max\{x_{j} ; j \neq i\} \\ 0 & \text{si } x_{i} < \max\{x_{j} ; j \neq i\}. \end{cases}$$
(2.1)

Ici, les v_i dénotent les valeurs que les différents joueurs attribuent à l'acquisition de l'objet mis à l'enchère. Les v_i décrivent donc les goûts des enchérisseurs. Pour simplifier l'exposé, on suppose que $v_i \in \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon...\}$. La règle d'allocation pour le cas d'enchères gagnantes multiples (le deuxième

⁸Pour la vente annuelle des vins de la Ville de Lausanne (qui n'est pas une enchère au premier prix), par exemple, "les surenchères ne seront pas inférieures à 10 ct. par litre."

cas dans (2.1)) est celle d'une attribution par tirage au sort à chances égales; on peut en considérer d'autres sans bouleverser l'analyse.⁹

La structure que nous venons de définir est celle d'un jeu sous forme normale. Pour mettre cette structure dans le cadre défini à la dernière section, nous devons faire l'hypothèse supplémentaire que la forme normale est connue par tous les joueurs. Cette hypothèse est très forte, elle implique que toutes les valeurs $v_1, ..., v_n$ sont connues par tous les enchérisseurs. Bien que cette hypothèse soit peu réaliste, nous l'admettons dans cette première analyse. Le cas plus général où chaque joueur ne connaît que sa propre évaluation est le sujet de la théorie de l'information asymétrique, traitée plus tard. Etant donné cette hypothèse, nous pouvons également admettre que $v_1 < v_2 < ... < v_n$, ce qui revient simplement à "rebaptiser" les joueurs. Il n'est pas difficile d'inclure le cas d'égalités, mais cela complique quelque peu la notation.

Pour l'analyse de ce jeu, nous cherchons d'abord les stratégies dominées dans cette enchère. On s'aperçoit rapidement qu'aucune stratégie n'est strictement dominée.

Les stratégies faiblement dominées sont plus nombreuses. En fait, pour le joueur i, tout $x_i > v_i$ est faiblement dominée par $\widehat{x}_i = v_i$. Si l'enchère la plus élevée des autres joueurs est plus petite ou égale à x_i , le joueur i gagne et le regrette, parce qu'il surpaie. Cela est évité en misant \widehat{x}_i , ce qui est strictement meilleur dans ce cas. Si x_i ne gagne pas, \widehat{x}_i est aussi bon ou mauvais que x_i . De façon similaire, $x_i = v_i$ est faiblement dominé par tout $\widehat{x}_i < v_i$.

Si $0 < x_i < v_i$, tout $\hat{x}_i > x_i$ est (strictement) pire que x_i si

$$\max\{x_i; j \neq i\} < x_i.$$

D'un autre côté, $\hat{x}_i < x_i$ est (strictement) pire si

$$\max\{x_i ; j \neq i\} = x_i.$$

Donc aucune mise entre 0 et v_i n'est faiblement dominée. Qu'en est-il de $x_i=0$? Clairement, si 0 est dominé, il l'est par ε . ε est strictement meilleur que 0, si le maximum des autres enchères est ε , parce que 0 n'est pas gagnant dans ce cas, alors que ε l'est. Est-ce possible que 0 soit strictement meilleur que ε ? Pour cela il faut que $x_{-i}=(0,...,0)$ et $\frac{1}{n}v_i>v_i-\varepsilon$ (la chance de $\frac{1}{n}$ de

⁹La définition (2.1) est spéciale en ce qu'elle suppose que les joueurs sont "neutres au risque" (ou ont au moins des fonctions d'utilité spécifiques).

gagner au prix de 0 doit être plus attractive que gagner sûrement au prix de ε), ce qui est équivalent à $v_i < \frac{n}{n-1}\varepsilon$, c.à.d. à $v_i = 0$ ou ε , ceci représentant des cas négligeables.

Quels sont les équilibres de Nash de cette enchère? Un équilibre est le suivant : les joueurs 1,...,n-1 enchérissent $x_i \leq v_{n-1}$, où l'une de ces inégalités est une égalité, et le joueur n enchérit $v_{n-1}+\varepsilon$. Ce comportement décrit en fait tout un ensemble d'équilibres, parce que les enchères des joueurs 1,...,n-1 ne sont pas complètement déterminées. Clairement, avec ce comportement collectif, aucun des joueurs i=1,...,n-1 ne peut augmenter son paiement en déviant, et de même pour le joueur n.

Voici un autre type d'équilibre : les joueurs 1, ..., n-1 enchérissent $x_i \le v_{n-1} - \varepsilon$, où l'une de ces inégalités est une égalité, et le joueur n enchérit v_{n-1} . Ces deux types d'équilibres (chaque type comprend beaucoup d'équilibres à cause du comportement non-spécifié des joueurs 1, ..., n-1) sont "très similaires" : le joueur n obtient l'objet pour à peu près v_{n-1} , et l'un des autres joueurs enchérit à peu près v_{n-1} lui aussi.

Mais il y a encore d'autres équilibres. Supposons que les joueurs 1, ..., n-1 enchérissent $x_i \leq v_n - 2\varepsilon$, avec max $\{x_1, ..., x_{n-1}\} > v_{n-1}$, et le joueur n enchérit $x_n = \max\{x_1, ..., x_{n-1}\} + \varepsilon$. Sous cette issue, les joueurs 1, ..., n-1 n'obtiennent pas l'objet et n'ont pas d'incitation à dévier. Soit m le nombre de joueurs enchérissant max $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$. La déviation du joueur n à $\widehat{x}_n = x_n - \varepsilon$ (la seule déviation envisageable) est-elle profitable? Elle l'est si

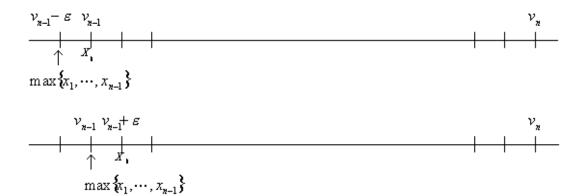
$$\frac{1}{m+1}(v_n - (x_n - \varepsilon)) > v_n - x_n \Longleftrightarrow v_n - x_n < \frac{1}{m}\varepsilon,$$

donc jamais parce que $x_n \leq v_n - \varepsilon$.

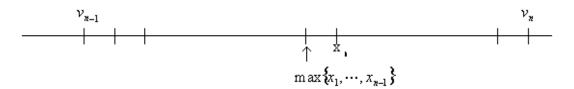
De nouveau, chacun de ces "équilibres" représente en fait divers équilibres, parce que le comportement des joueurs 1, ..., n-1 n'est pas déterminé, si ce n'est qu'il doit satisfaire la condition max $\{x_1, ..., x_{n-1}\} = x_n - \varepsilon$.

Tous les équilibres que nous avons identifiés ont la même structure : le joueur n soumet la plus forte enchère, et au moins un des autres joueurs enchérit "un tout petit peu moins" $(x_n - \varepsilon)$. A part cela, le comportement des autres joueurs n'est pas déterminé. Graphiquement, nous pouvons décrire ces équilibres comme dans la figure 2.1.

 $^{^{10}}$ Plus précisement, pour que le joueur ne dévie pas, il faut supposer que $v_n - v_{n-1} - \varepsilon \ge (v_n - v_{n-1})/2$, ce qui est équivalent à $v_n - v_{n-1} \ge 2\varepsilon$. Donc si v_n est tout proche de (pratiquement égal à) v_{n-1} , le joueur n va dévier. On va souvent ignorer ces cas marginaux dans notre analyse.



etc.



etc.



Fig. 2.1 – Des mises à l'enchère au premier prix

Dans ces équilibres, pour quoi les autres joueurs i=1,...,n-1 ne font-ils pas ce qu'ils veulent étant donné qu'ils n'obtiennent de toute manière pas l'objet? La réponse à cette question est qu'à équilibre, tout x_i a une double fonction :

(i) x_i est ce que le joueur i fait (une meilleure réponse à x_{-i}). Sous cet aspect le choix de x_i est libre sous la seule condition que $x_i < \max(v_i, x_n)$. (ii) x_i est pris en compte par les autres joueurs dans leur choix de stratégie. Sous cet aspect au moins un joueur doit enchérir $x_n - \varepsilon$ pour que le choix du joueur n soit optimal (une meilleure réponse).

Par rapport aux équilibres montrés dans la figure 2.2.1, deux questions immédiates se posent : 1. Existent-ils encore d'autres équilibres ? 2. Certains équilibres sont-ils plus plausibles que d'autres ?

La réponse à la première question n'est pas difficile : le lecteur se rendra vite compte qu'en tout équilibre, le joueur n doit être le seul à gagner l'enchère et au moins un autre joueur doit enchérir ε de moins que x_n . De plus, l'enchère gagnante doit être au moins égal à v_{n-1} , car autrement le joueur n-1 peut remporter l'enchère. Donc nous avons décrit toutes les issues d'équilibre (par issue nous sous-entendons ici le prix gagnant et le vainqueur de l'enchère).

En ce qui concerne la deuxième question, nous remarquons que dans presque tous les équilibres trouvés ci-dessus, un joueur joue une stratégie faiblement dominée. En fait, ceci est le cas dans tous les équilibres avec $\max\{x_1,...,x_{n-1}\} \geq v_{n-1}$. Cela constitue une situation peu convaincante : le joueur i enchérit $x_i > v_i$ espérant que son enchère ne gagnera pas. Mais si, contre toute attente, son enchère gagne, il est mécontent!

Remarquons en passant qu'une telle stratégie peut quand même être plausible dans certains cas. On s'attendrait à un tel comportement, par exemple, si le joueur i n'aime pas le joueur n et veut que ce dernier paie le plus possible. Une stratégie faiblement dominée permet d'atteindre ce but, dans ce cas, sans coût pour le joueur i. Mais, en fait, la situation d'animosité personnelle décrite ci-dessus est différente (plus complexe) que celle que nous avons modélisée auparavant. Un bon modèle devrait tenir compte de cette nouvelle caractéristique dans les préférences du joueur i.

Alors, si on élimine les stratégies faiblement dominées, il reste l'équilibre suivant :

- le joueur n-1 enchérit à peu près v_{n-1} $(v_{n-1}-\varepsilon)$,
- le joueur n enchérit un peu plus (v_{n-1}) et obtient l'objet,
- les joueurs i = 1, ..., n 2 enchérissent moins que v_i .

Si ce n'est pour le comportement des joueurs "secondaires" (1,...,n-2), cet équilibre est unique.

2.3 L'enchère au second prix

Dans le modèle de l'enchère au deuxième prix, on aura la même description des joueurs et de leurs stratégies que dans le modèle au premier prix, à savoir \mathcal{N} et $X_1 = \ldots = X_n = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon..\}$. Les fonctions de paiements sont maintenant :

$$u_i(x) = \begin{cases} v_i - \max\{x_j; j \neq i\} & \text{si } x_i > \max\{x_j; j \neq i\} \\ \frac{1}{m}(v_i - x_i) & \text{si } x_i = \max\{x_j; j \neq i\} \\ 0 & \text{si } x_i < \max\{x_j; j \neq i\} \end{cases},$$

et de nouveau on supposera que les $v_1, ..., v_n$ sont connus par les joueurs.

Comme à l'enchère au premier prix, on vérifie facilement qu'il n'y a pas de stratégie strictement dominée dans ce jeu. En revanche, pour les stratégies faiblement dominées, la situation est assez différente du cas précédent. Considérons le joueur i et une stratégie x_i quelconque, et dénotons $M_i = \max\{x_j; j \neq i\}$. Nous pouvons distinguer deux cas, le premier présentant un raisonnement semblable au cas de l'enchère au premier prix. Dans chacun de ces deux cas le raisonnement s'effectue de la manière suivante : d'abord on fixe x_i et puis on étudie pour chaque x_{-i} (représenté par M_i) la conséquence d'un passage de x_i à \hat{x}_i .

- 1. Si $x_i > v_i$, x_i est faiblement dominée par $\hat{x}_i = v_i$:
 - (a) si $M_i \leq v_i$, le passage de x_i à $\hat{x}_i = v_i$ ne change rien,
 - (b) si $v_i < M_i \le x_i$, le joueur i gagne l'enchère, mais il ne le veut (strictement) pas; donc $\widehat{x}_i = v_i$, ce qui donne 0, est strictement meilleur,
 - (c) si $M_i > x_i$, le joueur i ne gagne pas, il est donc indifférent entre x_i et $\hat{x}_i = v_i$.
- 2. Si $x_i < v_i$, x_i est aussi faiblement dominée par $\hat{x}_i = v_i$:
 - (a) si $x_i < M_i < v_i$, le joueur i ne gagne pas et améliore sa situation strictement en jouant $\widehat{x}_i = v_i$,
 - (b) si $M_i \geq v_i$, i ne gagne ni avec x_i , ni avec $\hat{x}_i = v_i$,
 - (c) si $M_i < x_i$, i gagne et paie M_i ($< v_i$), ce qui ne change pas s'il joue $\hat{x}_i = v_i$,

(d) si $M_i = x_i$, i gagne avec une probabilité strictement plus petite que 1, donc $\hat{x}_i = v_i$ est strictement meilleur, car il gagne avec certitude et paie le même prix.

Ainsi, tout $x_i \neq v_i$ est faiblement dominé par $\hat{x}_i = v_i$. Clairement, $x_i = v_i$ n'est pas faiblement dominé. Donc l'ensemble des stratégies faiblement dominées de l'enchère au second prix est beaucoup plus grand que sous l'enchère au premier prix. Il ne reste qu'une seule stratégie qui n'est pas dominée.

Ce résultat implique immédiatement que $(v_1, ..., v_n)$ est un équilibre de Nash (formellement nous avons vérifié cette implication à la série III des exercices). Y en a-t-il d'autres? Nous laissons cette question ouverte et recommandons au lecteur ou à la lectrice son étude.

En somme, si nous nous limitons aux équilibres en stratégies non faiblement dominées, nous obtenons l'équilibre unique suivant :

- tout joueur enchérit sa propre évaluation, v_i .
- le joueur n obtient l'objet pour un prix de v_{n-1} .

En comparant les enchères au premier et au second prix, on trouve donc que les résultats "essentiels", c'est à dire qui acquiert l'objet et quel est le prix payé, sont les mêmes, si on exclut les stratégies "peu raisonnables" que sont les stratégies faiblement dominées. Ce résultat a de quoi surprendre. Bien que les mécanismes soient très différents, les issues en sont les mêmes. Vickrey (1961) a montré que cela n'est pas dû à une coïncidence. Son fameux "théorème de l'équivalence des revenus" stipule que, dans certaines situations bien définies, toutes les enchères que le vendeur peut envisager donnent le même résultat.

2.4 Problèmes

Question 2.1:

Considérez une enchère au premier prix, telle que définie au cours, avec la seule différence qu'il n'y a pas d'unité minimale de paiement. Donc l'ensemble des stratégies admissibles du joueur i est $X_i = [0, \infty)$.

- 1. Déterminez les stratégies faiblement dominées de ce jeu.
- 2. Déterminez les équilibres de Nash de ce jeu. Que pensez-vous du résultat?

Question 2.2:

100 francs sont mis aux enchères de la manière suivante. Chacun des n enchérisseurs soumet une enchère sous pli cacheté (les enchères étantes limitées à des multiples de 5c). L'offre la plus élevée gagne les 100 francs (s'il y en a plusieurs, le prix est alloué par tirage au sort à chances égales parmi les plus fort offrants), mais toutes les enchères sont perdues (et pas seulement celle du vainqueur!).

- 1. Modélisez ces enchères par un jeu sous forme normale.
- 2. Trouvez les stratégies faiblement dominées de tout joueur.
- 3. Trouvez les équilibres de Nash du jeu.

Question 2.3:

Dans cette question nous considérons une situation où plusieurs unités d'un bien sont mises aux enchères. Nous étudierons deux différents types d'enchères, tous les deux utilisés, par exemple, par le ministère des finances américain pour vendre des obligations d'Etat.

Supposez qu'un vendeur ait 100 unités d'un bien à vendre et qu'il leur attribue une valeur de 10 (francs) par pièce. Il y a n acheteurs potentiels, qui sont identiques, ont des fonds illimités et attribuent une valeur de 20 (francs) à chaque unité du bien. Pour participer à l'enchère de ces objets, tout acheteur doit soumettre (sous pli cacheté) une fonction de demande $d_i(\circ)$ qui spécifie la quantité demandée pour chaque prix p et dont l'addition des quantités est inférieure ou égale à $100 : \sum_{p} d_i(p) \le 100$. Pour simplifier on suppose qu'il n'y a que trois prix possibles, p = 10, 15, 20.

2.4. PROBLÈMES 47

Pour toute donnée d'enchères, $d = (d_1, ..., d_n)$, on peut donc définir la demande agrégée, A, comme étant $A_d(p) = \sum_i d_i(p)$. Le prix équilibrant la demande et l'offre (PEDO, market clearing price) est la valeur p^* la plus élevée telle que $\sum_{p>p^*} A_d(p) \ge 100$. Etant donné p^* , l'allocation des unités aux enchérisseurs est faite de la façon suivante : Toute demande $d_i(p)$ pour $p > p^*$ est satisfaite complètement, les demandes aux prix $p < p^*$ ne reçoivent rien, et toute demande pour $p = p^*$ est satisfaite proportionnellement. Formellement, pour toute donnée d'enchères d, on peut donc définir le facteur d'attribution

$$\pi(p) = \begin{cases} 0 & \text{pour } p < p^* \\ \frac{100 - \sum\limits_{q > p^*} A_d(q)}{A_d(p^*)} & \text{pour } p = p^* \\ 1 & \text{pour } p > p^* \end{cases}$$

 $\pi(p) = \begin{cases} 0 & \text{pour } p < p^* \\ \frac{100 - \sum\limits_{q > p^*} A_d(q)}{A_d(p^*)} & \text{pour } p = p^* \\ 1 & \text{pour } p > p^* \end{cases}$ L'enchérisseur i reçoit donc $\sum\limits_{p} \pi(p) d_i(p)$ unités. Nous considérons ici deux modes de détermination des prix à payer.

La première (appelée l'enchère uniforme) prévoit que les enchérisseurs paient le PEDO, p^* , pour chaque unité obtenue. La deuxième (appelée l'enchère discriminatoire) prévoit que tout enchérisseur obtient toute unité au prix qu'il a offert dans sa fonction de demande.

- 1. Pour n=3 expliquez le mécanisme d'allocation par un exemple en utilisant un graphique pour la description de l'offre et de la demande.
- 2. Déterminez les stratégies faiblement dominées dans l'enchère uniforme.
- 3. Déterminez les stratégies faiblement dominées dans l'enchère discriminatoire.

Dès maintenant nous supposons que n = 11 et nous considérons seulement des équilibres de Nash symétriques (c.à .d. des équilibres où $d_1 = ... = d_n$).

- 4. Dans l'enchère uniforme, y a-t-il un équilibre symétrique en stratégies non faiblement dominées où $p^* = 20$ (c.-à.-d. où le vendeur s'approprie tout le surplus)? Y a-t-il un équilibre symétrique en stratégies non faiblement dominées où $p^* = 10$ (c.à .d. où les acheteurs s'approprient tout le surplus)?
- 5. Dans l'enchère discriminatoire, y a-t-il un équilibre symétrique en stratégies non faiblement dominées où $p^* = 20$? Y a-t-il un équilibre symétrique en stratégies non faiblement dominées où $p^* = 10$?

6. Sur la base de vos résultats aux problèmes 4 et 5, quels PEDOs prédisezvous dans l'enchère uniforme et dans l'enchère discriminatoire si les joueurs ne communiquent pas entre-eux avant l'enchère? Qu'en est-il s'il y a de la communication?

(Pour une analyse approfondie des enchères à unités multiples voir R. Wilson (1979). Pour des résultats expérimentaux dans l'enchère décrite cidessus voir G. Goswami, Th. Noe, M. Rebello (1996))

Chapitre 3

Jeux sous forme normale : théorie

Les concepts que nous avons introduits au chapitre 1 et appliqués au chapitre 2 aident à comprendre le comportement des agents dans des situations stratégiques où interviennent, à des degrés variables, la notion que les participants à une interaction économique sont auto-intéressés et réfléchissent à la situation. Cependant nous avons guère discuté la cohérence logique de ces concepts, leurs limites et leurs fondements conceptuels. Dans cette section, nous aborderons quelques questions à ce propos, bien que nous devons nous limiter à quelques remarques seulement. En particulier, nous considérerons quatre questions.

- 1. Quelle est la relation entre les différents concepts que nous avons introduits pour discuter les jeux sous forme normale?
- 2. Pour les jeux qui n'admettent pas d'équilibre de Nash tel que défini, est-il possible de trouver un concept de "solution" comparable qui, en particulier, possède des propriétés similaires, à savoir une certaine "optimalité" et "stabilité" des choix des joueurs?
- 3. Le concept d'équilibre de Nash est-il utile pour la prédiction, dans le sens où pour un nombre suffisant de situations, le jeu décrivant la situation admet un équilibre?
- 4. Quelle sont les raisons qui peuvent justifier que les joueurs d'un jeu sous forme normale utilisent un concept aussi sophistiqué que celui de l'équilibre de Nash?

Reprenons ces questions l'une après l'autre.

3.1 La relation entre les concepts de solution

La question sur la relation entre les différents concepts que nous avons introduits est importante aussi bien au sens pratique, que théorique. Sur le plan théorique, il est important de comprendre quelles sont les hypothèses faites, implicitement ou explicitement, par rapport au comportement individuel, et d'étudier quelles en sont les plus restrictives, si elles sont mutuellement compatibles, quelle est leur relation avec des concepts introduits en psychologie ou sociologie, etc. Sur le plan pratique, il est souvent utile de savoir si un concept peut aider à trouver une solution basée sur un autre concept.

Surtout les relations entre les notions de dominance, prudence et équilibre méritent d'être examinées. Nous en présentons ici quelques propriétés importantes.

Proposition 3.1 : Si le jeu réduit par élimination successive de toutes les stratégies (faiblement ou strictement) dominées d'un jeu sous forme normale est obtenu après un nombre fini de tours d'élimination et n'a qu'une seule issue, cette issue est un équilibre de Nash du jeu original.

Démonstration : Soit $G = (\mathcal{N}, X_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)$ un jeu sous forme normale. Dénotons par $G^1 = (\mathcal{N}, X_1^1, ..., X_n^1, u_1, ..., u_n)$ le jeu obtenu après élimination de toutes les stratégies (faiblement ou strictement) dominées, par G^2 le jeu obtenu après deux tours d'éliminations, etc, et supposons que l'itération s'arrête après T tours.

L'hypothèse faite dans la proposition est que G^T consiste en une issue unique. Nous l'appelons x. En comparant G^T et G^{T-1} , on constate que pour tout joueur i toutes les stratégies dans G^{T-1} qui sont différentes de x_i sont dominées par x_i . Donc x est un équilibre de Nash du jeu G^{T-1} .

Montrons maintenant que x est aussi un équilibre de G^{T-2} . Pour cela, supposons que cela ne soit pas le cas, donc qu'il y ait un joueur i et une stratégie $\widehat{x}_i \in X^{T-2}$ de i tels que i préfère \widehat{x}_i strictement à x_i étant donné x_{-i} . Si $\widehat{x}_i \in X^{T-1}$, on a une contradiction (en ce cas, x_i ne peut pas être un équilibre dans G^{T-1}). Donc $\widehat{x}_i \notin X_i^{T-1}{}_i$, ce qui veut dire que \widehat{x}_i est dominée par une stratégie dans X^{T-2} , disons \widehat{x}_i . Si $\widehat{x}_i \in X^{T-1}$, on a de nouveau une contradiction (car $u_i(\widehat{x}_i, x_{-i}) \geq u_i(\widehat{x}_i, x_{-i}) > u_i(x_i, x_{-i})$). \widehat{x}_i est donc dominée par une stratégie $\widehat{x}_i \in X^{T-2}$. En continuant ce procédé on arrive à une contradiction.

 $^{^1}$ À strictément parlé, ce procédé doit s'arrêter seulemement si X_i est fini. Si X_i est

Par le même raisonnement on constate que x doit être un équilibre de G^{T-3} , etc. On arrive au début de la chaîne d'éliminations, donc à G, ce qui achève la démonstration.

Nous avons utilisé un cas spécial de cette proposition (le cas T=1) lors de notre discussion de l'enchère au second prix.

Proposition 3.2 : Une stratégie d'équilibre de Nash d'un jeu sous forme normale n'est jamais éliminée par élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées.

Démonstration : Similaire à la démonstration de la proposition 3.1 et laissée au lecteur ou à la lectrice.

Une conséquence de cette dernière proposition est qu'il suffit, pour la recherche d'équilibres d'un jeu, de les chercher dans le jeu réduit par ESTSSD. Dans certaines applications, cela simplifie la recherche d'équilibres. Notez que la Proposition 3.2 n'est pas correcte si on remplace la dominance stricte par la dominance faible.

A propos de la relation entre les stratégies prudentes et l'équilibre de Nash, nous avons déjà mentionné qu'il existe une relation historiquement importante dans le cas des jeux à somme nulle.

Proposition 3.3 : Si le jeu à deux joueurs et à somme nulle $(X_1, X_2, u_1, -u_1)$ admet un équilibre de Nash, alors tout couple (x_1, x_2) de stratégies prudentes est un équilibre de Nash, et les paiements sont les mêmes à tout équilibre.

Donc, dans le cas des jeux à somme nulle à deux joueurs, le raisonnement strictement "individualiste" derrière les stratégies prudentes est déjà parfaitement stratégique, si le jeu admet un équilibre. Ce constat facilite considérablement le calcul d'équilibres dans ces jeux, parce que le calcul de stratégies d'équilibre peut être décentralisé complètement : chaque joueur calcule ses stratégies prudentes, et toute combinaison de ces stratégies donne un équilibre, qui a, de surcroît, la même valeur pour tout joueur. La démonstration de cette proposition est relativement simple, une fois qu'on se rend compte que l'hypothèse du "pessimisme", qui est à la base du comportement "maximin", est parfaitement rationnelle dans les jeux à somme nulle et à

infini il faut considérer les limites de la séquence des $\widehat{x}_i, \widehat{\widehat{x}}_i, \dots$

deux joueurs. En fait, dans ces jeux, un joueur ne peut pas seulement garantir le paiement maximin pour soi-même, mais il peut aussi prévenir l'autre joueur d'obtenir plus que son paiement maximin à lui.

3.2 Stratégies mixtes

Considérons le jeu d'enfants "feuille, caillou, ciseau", joué en montrant simultanément un des trois symboles de "feuille", "caillou" ou "ciseau" avec la main. Comment les enfants doués jouent-ils à ce jeu? Ils essaient de surprendre l'adversaire au maximum, en utilisant des stratégies aléatoires. La propriété principale de ce type de jeu est que, si le choix d'un joueur est connu, l'autre peut "gagner", c'est à dire faire aboutir le jeu à une issue qui lui est favorable et qui est défavorable à l'autre.

Ceci est une situation fréquente dans le cadre d'un grand nombre de rencontres concurrentielles, telles que le duel de penalty entre le gardien et le tireur, le jeu de poker (passer ou relancer avec des mauvaises cartes), ou dans les jeux de guerre. Dans toutes ces situations, un bon joueur utilisera des "stratégies mixtes" :

Définition : Une stratégie mixte du joueur i dans un jeu sous forme normale est une distribution de probabilité sur son ensemble de stratégies X_i .

Donc, si
$$X_i = \{x_i^1,...,x_i^{m_i}\}$$
, une stratégie mixte est la donnée de m_i nombres $p_i^1,...,p_i^{m_i}$, tels que $0 \le p_i^k \le 1$ pour tout k et $\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k = 1$.

Dans cette perspective, les $x_i \in X_i$, qui correspondent aux stratégies mixtes avec $p_i^k = 1$, sont appelés "stratégies pures". Il y a plusieurs façons d'interpréter ou de justifier le concept de "stratégies mixtes" dans les applications économiques. Le problème principal est de justifier les choix aléatoires hors des situations de jeu au sens étroit telles que le poker où le choix au hasard est un élément important de stratégie. Par exemple, la théorie prédit que dans les situations de concurrence en recherche et développement ("course au brevet"), les entreprises utilisent des stratégies mixtes. Est-ce que cela implique que le management se réunit chaque matin et joue aux dés? Certainement pas. Une excellente discussion de ce problème se trouve dans Osborne-Rubinstein (1994), où les deux auteurs confrontent leurs différentes opinions individuelles.

Revenons au jeu de "feuille, caillou, ciseau". Sa matrice de paiements est une matrice 3×3 , présentant 9 issues. Avant de décrire les paiements associés à ces issues, nous présentons celles-ci dans la matrice suivante :

	fe	ca	ci	
fe	match nul	fe gagne	ci gagne	(3.1)
ca	fe gagne	match nul	ca gagne	(0.1)
ci	ci gagne	ca gagne	match nul	

Une stratégie mixte d'un joueur dans ce jeu est la donnée de trois probabilités, une pour chaque action possible du joueur, formellement : $(p_1^{fe}, p_1^{ca}, p_1^{ci})$ pour le joueur 1 et $(p_2^{fe}, p_2^{ca}, p_2^{ci})$ pour le joueur 2, où $0 \le p_i^{fe}, p_i^{ca}, p_i^{ci} \le 1$, $p_i^{fe} + p_i^{ca} + p_i^{ci} = 1$.

Si nous voulons travailler avec les stratégies mixtes, nous devons aller au delà de matrices d'issues telles que (3.1) et exprimer les objectifs des joueurs en utilisant les stratégies mixtes. Mais lorsque le joueur est confronté à une telle stratégie, il fait face en fait à un problème de choix sous incertitude : même s'il choisit une action spécifique, sans randomiser, l'issue du jeu est incertaine. Il nous faut donc comprendre comment un joueur décide lorsqu'il se trouve confronté au risque.

Jusqu'à ce stade, nous avons supposé que la fonction de paiement u_i décrit l'évaluation numérique, par exemple l'équivalence monétaire, que le joueur i attribue aux différentes issues du jeu. La seule propriété de u_i qui importe pour les analyses faites jusqu'à présent est l'ordre qu'elle impose sur les issues. Cela veut dire que i préfère une issue x à une autre issue \hat{x} si et seulement si $u_i(x) \geq u_i(\hat{x})$ (strictement si et seulement si $u_i(x) > u_i(\hat{x})$). La magnitude de la différence entre $u_i(x)$ et $u_i(\hat{x})$ n'y joue aucun rôle.

Pour des choix sous incertitude, cependant, la grandeur de ces différences joue un rôle. Supposons par exemple qu'un individu est confronté à la possibilité de soit gagner 100 francs, soit de ne rien gagner, soit perdre 100 francs. Pour être capable d'évaluer cette situation, l'individu doit connaître les probabilités avec lesquelles ces trois événements arrivent. Donc considérons plus spécifiquement la "loterie" suivante :

$$x^{1} = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \frac{1}{10} \\ 100 & \text{avec probabilité } \frac{3}{5} \\ -100 & \text{avec probabilité } \frac{3}{10} \end{cases}$$

 x^1 n'est rien d'autre qu'une distribution de probabilité sur les nombres -100,

0, 100. Comment l'individu peut-il comparer cette "loterie" à une autre loterie, par exemple à la loterie x^2 donnée par

$$x^{2} = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } \frac{3}{5} \\ 100 & \text{avec probabilité } \frac{3}{10} \\ -100 & \text{avec probabilité } \frac{1}{10} \end{cases}$$

On se rend vite compte par introspection que les valeurs $u_i(x)$ qu'un individu attribue aux différents gains et pertes jouent un rôle important dans ce genre de comparaison de choix sous risque. Par exemple, un individu peut attribuer une importance plus grande aux pertes qu'aux gains, ou considérer les petites pertes comme relativement moins graves que des grandes pertes, etc. Pour donner deux exemples d'évaluation simples des deux loteries x^1 et x^2 , un individu qui abhorre les pertes attachera beaucoup d'importance à l'issue -100 et préférera donc la loterie x^2 , tandis qu'une compagnie d'assurance bien diversifiée, qui ne s'intéresse qu'à la valeur moyenne d'un risque, préférera la loterie x^1 .

Pour décrire de façon précise les préférences d'un individu face aux choix monétaires incertains, il nous faut donc spécifier comment l'individu évalue des montants d'argent différents si ces paiements sont incertains. La théorie de la décision nous fournit un outil puissant à cette fin, la théorie de l'utilité de von Neumann et Morgenstern. Cette théorie démontre qu'on peut décrire, sous certaines conditions, les préférences d'un individu sur des paiements incertains par une fonction d'utilité, dite von-Neumann-Morgenstern, strictement croissante, $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que l'individu préfère la loterie x à la loterie y si et seulement si

$$Eu(x) \ge Eu(y),$$

où E dénote l'espérance mathématique (l'inégalité est stricte si la préférence est stricte). La fonction u décrit l'attitude de l'individu vis à vis du risque.

A titre d'exemple, supposons pour le cas des deux loteries x^1 et x^2 données plus haut, qu'un individu évalue les trois issues possibles de la manière suivante :

$$u(x) = \begin{cases} -300 & \text{si } x = -100\\ 0 & \text{si } x = 0\\ 90 & \text{si } x = 100 \end{cases}$$
 (3.2)

Cet individu attribue donc une valeur (utilité espérée) à la loterie x^1 de:

$$Eu(x^{1}) = \frac{3}{10}(-300) + \frac{3}{5}90 + \frac{1}{10}0 = -36$$

et une valeur (utilité espérée) à la loterie x^2 de

$$Eu(x^2) = \frac{1}{10}(-300) + \frac{3}{10}90 + \frac{3}{5}0 = -3$$

Il préféra donc la loterie x^2 à la loterie x^1 . Si un autre individu a la fonction d'utilité v(x) = x, on vérifie vite qu'elle attribue la valeur de $v(x^1) = Ex^1 = 30$ à la loterie x^1 et de $v(x^2) = Ex^2 = 20$ à la loterie x^2 . Ce dernier préfère donc la loterie x^1 .

Dans beaucoup d'applications, notamment dans des modèles de finance, on suppose que les individus sont "averses au risque", dans le sens que pour toute loterie possible, ils préfèrent l'espérance mathématique de la loterie à la loterie elle-même :

$$u(Ex) > Eu(x)$$
.

De plus, un individu qui pour toute loterie, préfère la loterie à la valeur sûre, qui est sa moyenne, a un "goût pour le risque". Les individus qui sont indifférents entre une loterie et sa moyenne sont appelés neutres au risque. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, l'individu avec la fonction d'utilité u donnée par (3.2) est averse au risque, alors que l'autre est neutre au risque.

Dans ce cours, la forme de la fonction d'utilité des joueurs d'un jeu nous intéresse peu. Mais nous devons en tenir compte, si les joueurs utilisent des stratégies mixtes. Pour voir cela, revenons à notre exemple de "feuille, caillou, ciseau" et supposons que le joueur 2 joue la stratégie mixte $(p_2^{fe}, p_2^{ca}, p_2^{ci}) = (\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10})$. Que devrait faire le joueur 1 face à ce comportement? S'il joue "feuille", il obtient la loterie suivante :

$$x^{fe} = \begin{cases} \text{match nul} & \text{avec probabilité } \frac{1}{10} \\ \text{perdre} & \text{avec probabilité } \frac{3}{10} \\ \text{gagner} & \text{avec probabilité } \frac{3}{5} \end{cases}$$

Si, par contre, il choisit "caillou", il obtient

$$x^{ca} = \begin{cases} \text{match nul} & \text{avec probabilité } \frac{3}{5} \\ \text{perdre} & \text{avec probabilité } \frac{1}{10} \\ \text{gagner} & \text{avec probabilité } \frac{3}{10} \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu plus haut (notez que les loteries x^{fe} et x^{ca} correspondent exactement aux loteries x^1 et x^2), le choix entre "feuille" et "caillou" va maintenant dépendre de la fonction d'utilité du joueur sur les trois événements "match nul", "perte" et "gain". En fait, avec une fonction d'utilité comme u (3.2) ci-dessus (définie maintenant sur 0 (pour "match nul"), -1 (pour "perte") et 1 (pour "gain") au lieu de 0, -100 et 100), le joueur 1 préfère jouer "caillou". Avec une fonction d'utilité comme v ci-dessus, il préfère "feuille".

Pour pouvoir déterminer le choix optimal d'un joueur dans des conditions de risque, il faut donc connaître sa fonction d'utilité. Nous avons supposé cela dès le début de notre analyse. En fait, la définition d'un jeu sous forme normale au chapitre 2.1 contient les fonctions d'utilité des joueurs comme partie intégrale. La seule nouveauté que nous faisons dans cette partie est que la forme de la fonction d'utilité prend en considération le comportement face au risque. Par conséquent, nous pouvons décrire la matrice de paiements de "feuille, caillou, ciseau" par

	fe	ca	ci	
	0	1	-1	
fe	0	-1	1	
ca	-1	0	1	(3.3)
	1	0	-1	·
ci	1	-1	0	
	-1	1	0	

comme nous l'avons fait pour des jeux similaires jusqu'à présent. Par contre, si nous savons que les paiements réels dans ce jeu sont donnés par un transfert de 1 du perdant au gagnant (et d'un transfert de 0 en cas de match nul), la formulation (3.3) implique que les joueurs sont neutres au risque.

Dans ce cours, rien ne changera si nous continuons à utiliser les formes normales comme auparavant, car les fonctions d'utilité contiennent, par définition, toute l'information sur les préférences d'un joueur, y compris son comportement face au risque. Si nous modélisons cependant des situations spécifiques définies par des paiements monétaires (à l'exemple des enchères à la section 2.2), nous devons à partir de maintenant soit faire l'hypothèse supplémentaire de la neutralité au risque, soit modifier les fonctions de paiements.²

²Nous avons fait ici l'hypothèse que les fonctions d'utilité des joueurs sont définies

Pour continuer la discussion de notre exemple, supposons donc que la matrice de "feuille, caillou, ciseau" soit donnée par la matrice (3.3). Un joueur i cherche donc à maximiser l'espérance de son utilité :

$$U_i = p_i^{fe} p_j^{ca} - p_i^{fe} p_j^{ci} + p_i^{ca} p_j^{ci} - p_i^{ca} a_j^{fe} + p_i^{ci} p_j^{fe} - p_i^{ci} p_j^{ca}$$
(3.4)

où $j \neq i$. Nous revenons à cette expression à la section 2.4.1 ci-dessous. U_i peut être considéré comme la fonction de paiements du joueur i dans le jeu élargi $(\mathcal{N}, \overline{X}_1, \overline{X}_2, U_1, U_2)$ dans lequel les ensembles de stratégies des deux joueurs sont leurs stratégies mixtes du jeu original :

$$\overline{X}_i = \{ (p_i^{fe}, p_i^{ca}, p_i^{ci}) \in \mathbb{R}^3; 0 \le p_i^{fe}, p_i^{ca}, p_i^{ci} \le 1, p_i^{fe} + p_i^{ca} + p_i^{ci} = 1 \}.$$

Les équilibres de Nash dans ce jeu élargi, appelé "l'extension mixte" du jeu original, sont les meilleures réponses des deux joueurs les uns aux autres, en termes de stratégies mixtes. Plus généralement, nous pouvons formuler la notion d'équilibre en termes des stratégies mixtes pour tout jeu :

Définition : Soit $(\mathcal{N}, X_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)$ un jeu sous forme normale et $P_1, ..., P_n$ des stratégies mixtes pour les n joueurs. $(P_1, ..., P_n)$ est un équilibre en stratégies mixtes, si aucun joueur i n'a une autre stratégie mixte qui lui donne strictement plus en espérance que P_i , pour P_{-i} fixe.

Formellement cette propriété d'équilibre peut être exprimée comme cela : Si E_{P_i} dénote l'espérance mathématique par rapport à la distribution de probabilité P_i , la combinaison de stratégies mixtes $(P_1, ..., P_n)$ est un équilibre en stratégies mixtes si

$$E_{P_1}E_{P_2}...E_{P_n}u_i(x) \ge E_{P_1}...E_{P_{i-1}}E_{\widehat{P}_i}E_{P_{i+1}}...E_{P_n}u_i(x)$$

pour toute stratégie mixte \widehat{P}_i et tout joueur i. Donc, si le jeu est fini et $P_i = (p_i(x_i^1), ..., p_i(x_i^{m_i})), (P_1, ..., P_n)$ est un équilibre en stratégies mixtes, si

$$\sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} u_1(x_1, \dots, x_n) p_1(x_1) \cdot \dots \cdot p_n(x_n)$$

$$\geq \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} u_i(x_1, \dots, x_n) p_1(x_1) \cdot \dots \cdot p_{i-1}(x_{i-1}) \cdot \widehat{p}_i(x_i) \cdot p_{i+1}(x_{i+1}) \cdot \dots \cdot p_n(x_n)$$

pour toute stratégie mixte \widehat{P}_i de tout joueur i.

sur les montants monétaires. Cela implique que les évaluations par un joueur de deux issues différentes avec les mêmes paiements monétaires sont identiques. Il vaut la peine de réfléchir à cette hypothèse.

3.3 Existence des équilibres de Nash

Nous avons vu plusieurs exemples de jeux sans équilibre en stratégies pures (tels que "feuille, caillou, ciseau" ci-dessus), et nous avons introduit une généralisation de ce concept qui semble assez naturelle pour les jeux à intérêts opposés et qui donne des prédictions du type "équilibre" pour ces jeux. Une question immédiate qui se pose ensuite est combien d'exemples de jeux sans équilibre y a-t-il au-delà des exemples discutés et quelles sont leurs caractéristiques?

Pour analyser cette question, il convient de distinguer deux cas : les jeux possédant un nombre fini de stratégies ("jeux finis") et les jeux infinis. Des jeux infinis vu précédemment sont, par exemple, la concurrence à la Bertrand/Cournot, et les enchères avec X_i dénombrable ou non-dénombrable. Pour les jeux infinis, bien qu'il soit souvent possible de trouver des équilibres pour des jeux donnés, il est difficile de démontrer en général des résultats d'existence d'équilibre. Pour les jeux finis cependant, il existe un résultat fort :

Proposition 3.4 : Tout jeu fini admet un équilibre en stratégies mixtes.

Pour comprendre la complexité de cette proposition à l'apparence si simple, il suffit de réfléchir aux échecs. A la section 2.1.1 nous avons décrit la forme normale de ce jeu et vu qu'il est un jeu fini. D'après la proposition, il admet donc un équilibre. Mais personne ne le connaît...

La démonstration de ce résultat, donnée pour la première fois par John Nash (1950) dans sa thèse, qui introduisait la notion de l'équilibre ("de Nash"), utilise un théorème mathématique (dit de point fixe) au-delà de nos moyens.

3.4 Justifications de l'équilibre de Nash

Supposons que l'on demande à un groupe d'individus de jouer une fois à un jeu sous forme normale sans communication possible entre eux, aussi bien avant et après que le jeu soit joué. Bien qu'un équilibre de Nash existe dans de nombreux jeux, comme nous avons vu dans la dernière section, il est en général improbable dans de telles situations que les joueurs jouent un équilibre de Nash.³ La raison est simplement que l'équilibre de Nash nécessite la connaissance explicite ou implicite de ce que les autres joueurs font et que, sans expérience ou communication, cette connaissance ne peut être attendue. De ce fait, le concept d'équilibre de Nash est justifié typiquement par quelques mécanismes équilibrants sous-jacents. Nous allons discuter ici de quatre importants mécanismes de ce genre : (i) raisonnement et information individuel, (ii) accord explicite mais non exécutoire, (iii) apprentissage conscient, (iv) évolution biologique non consciente.

La question principale est donc comment les joueurs peuvent achever le dégrée de coordination nécessaire pour jouer un équilibre de Nash. Une approche directe à cette question est de se demander quelles sont les conditions épistémologiques nécessaires et suffisantes pour des joueurs rationnels dans un jeu sous forme normale pour jouer un équilibre de Nash s'ils sont incapables de communiquer. Cette procédure est similaire à ce que nous avons appelé auparavant des approches individualistes aux jeux sous forme normale.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la notion la plus faible du comportement d'optimisation individuelle est donnée par l'élimination des stratégies strictement dominées. Aucun joueur rationnel, où la rationalité est définie comme la poursuite optimale des objectifs définis dans les fonctions d'utilité, ne va utiliser une stratégie strictement dominée. Si la rationalité et la connaissance du jeu sont connaissance commune, dans le sens que chaque joueur sait que chaque joueur sait que... que chaque joueur connaît le jeu et la rationalité de tous les autres joueurs, des prédictions plus fortes sont possibles. Comme nous l'avons vu, uniquement les stratégies qui survivent à l'élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées sont dès lors des choix possibles. Mais à l'exception de cas spéciaux tels que le jeu de concurrence à la Cournot avec deux firmes de la série d'exercice 2, cette prédiction est bien plus faible que celle de l'équilibre de Nash. Ainsi, d'autres conditions sont nécessaires pour que l'équilibre de Nash prévale parmi les stratégies qui survivent l'élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées.

Ces conditions sont en général quelque peu compliquées, mais dans le cas de l'équilibre en stratégies pures on peut en donner une description simple.

³Il se peut qu'il y ait des cas losque l'équilibre de Nash est complètement raisonnable à prévoir, par exemple dans le dilemme du prisonnier lorsque les stratégies sont strictement dominantes.

Dans ce cas, on n'a pas besoin de poser comme hypothèse que les joueurs ont une connaissance commune de ce qu'ils savent. Plus précisément, il n'est pas difficile de voir qu'une issue $(x_1, ..., x_n)$ d'un jeu sous forme normale à n joueurs est un équilibre de Nash, si chaque joueur est rationnel, connaît ses fonctions de paiements et connaît le choix de stratégies des autres joueurs. Il n'est pas nécessaire de poser l'hypothèse que les joueurs ont des connaissances communes sur quoique ce soit. Toutefois, on doit admettre que les joueurs connaissent les stratégies de chacun des autres joueurs. La première hypothèse est plus faible que les conditions nécessaires pour l'élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées, la seconde est plus forte.

La difficulté dans le cas général ressort des stratégies mixtes et leurs interprétations. Nous n'allons pas en discuter ici (voir Aumann et Brandenburger, 1995). Ce qui est important de souligner, toutefois, est que si on veut justifier l'équilibre de Nash sur des bases épistémologiques il est en général impossible de supposer moins que le fait que les joueurs connaissent les stratégies des autres joueurs. C'est une hypothèse forte.

Cette hypothèse est toutefois justifiée dans des situations dans lesquelles les joueurs peuvent communiquer entre eux avant le déroulement du jeu et peut-être même dans une certaine mesure se mettre d'accord sur un déroulement possible. Poussé à l'extrême, cela peut permettre aux joueurs la conclusion de contrats sur comment jouer le jeu. Dans le contexte de jeu normal, un contrat énoncerait un accord entre chaque partie sur une action spécifique. Ces actions sont ensuite exécutées, toutes déviations par rapport au plan proposé conjointement seraient punies par des actions communes ou par un système judiciaire. Si ce type d'arrangement est possible, les actions dans un jeu sous forme normale se réduisent à la sélection d'une issue du jeu et de la négociation correspondante entre les joueurs sur la redistribution du surplus découlant de l'issue, sans attention donnée au comportement individuel égoïste.

Toutefois, en réalité beaucoup, voire la plupart des interactions ne peuvent pas être définies à l'avance en détail et réglées par voie légale si nécessaire. Deux exemples extrêmes sont les accords internationaux et les accords illé-

⁴A noter qu'à proprement parler, la condition que nous avons donnée est suffisante, mais pas nécessaire pour obtenir un équilibre de Nash. La raison est que les joueurs peuvent jouer un équilibre de Nash par accident, sans rien connaître. De plus, on peut facilement montrer par exemple que si la condition est violée, les joueurs ne vont pas toujours jouer Nash.

gaux. Dans les deux cas, il n'y a pas de voie légale qui est capable de faire exécuter les contrats (exception faite dans des cas spéciaux tels que quelques problèmes de commerce régis par l'OMC). Dans les deux cas, le contrat et les négociations pour y arriver fournissent de nombreuses occasions pour des coordinations explicites et implicites parmi les parties. C'est donc sans étonnement que la théorie des jeux est devenue un outil important d'analyse en économie internationale, en politique de la concurrence (cartels) ou corruption.

Toutefois, ces deux exemples représentent seulement le sommet de l'iceberg. En fait, beaucoup de contrats commerciaux sont incomplets dans le sens que certains des aspects de la transaction envisagée sont soit inconnus pour certains des participants, soit trop difficile à décrire en détail. Le résultat est un accord qui contient assez d'information pour guider les choix stratégiques des participants, mais qui n'est pas assez précis pour contraindre à une issue spécifique mécaniquement. Si c'est le cas, l'accord doit être défini tel qu'il doit rendre toute déviation individuelle non attractive ("carotte au lieu du bâton"), ce qui est justement l'approche de l'équilibre de Nash. Dans des domaines autres que les accords commerciaux, le problème d'impossibilité à contraindre à une certaine action est plus prononcé. Prenons une illustration simple qu'est un joint venture de deux entreprises pour le développement d'un certain produit. Les partenaires typiquement préparent une telle entreprise avec une grande attention établissant en détail plusieurs procédures et règles de conduite. Mais beaucoup de ces procédures et règles ne peuvent être exécutés (ou seulement à grands frais) si un partenaire dévie de ceuxci après le début du projet. Ainsi, ces règles doivent prendre en compte les contraintes de Nash. Plus généralement, beaucoup d'accords en commerce, en politique ou de la vie privée se reportent ou devraient se reporter sur la auto-exécution, ce qui signifie qu'ils respectent ou devraient respecter les restrictions imposées par l'équilibre de Nash.

Il restent à discuter deux justifications importantes du concept de l'équilibre de Nash. L'apprentissage est le concept que les joueurs ajustent leurs comportements dans des répétitions d'un jeu, ayant observé les comportements des autres joueurs et en tirant leurs conclusions (peut-être pas parfaitement rationnels). La théorie de l'apprentissage dans les jeux a été fortement développée ces dernières années, mais nous n'avons pas le temps ici de la présenter.⁵

⁵Une introduction à quelques idées clé de cette théorie (pas tout à fait simple) est donnée

Le quatrième concept à discuter ici serait celui de l'évolution. Nous souhaitons consacrer plus d'attention à ce concept important, pas seulement en sciences sociales, mais surtout en biologie, et y revenons en plus de détail au chapitre 5.

dans l'ouvrage de Fudenberg et Levine (1998), "The Theory of Learning in Games".

3.5. PROBLÈMES 63

3.5 Problèmes

Question 3.1:

Considérez un jeu sous forme normale quelconque. On appelle équilibre strict toute issue $(x_1^*, ..., x_n^*)$ telle que $u_i(x^*) > u_i(x_i, x_{-i}^*)$ pour tout x_i et tout i

- 1. Montrez que tout équilibre strict est un équilibre de Nash.
- 2. Montrez que pas tout équilibre Nash n'est un équilibre strict.
- 3. En considérant des exemples vus dans le texte, discutez le problème d'existence pour ce concept.

Question 3.2:

Les énoncés suivants sont-ils corrects? Pourquoi?

- 1. Dans les jeux sous forme normale à deux joueurs et à somme nulle tout couple (x_1, x_2) de stratégies prudentes est un équilibre de Nash.
- 2. Toute $(x_1, ..., x_n)$ dans le jeu réduit par ESTSFD d'un jeu sous forme normale est un équilibre de Nash du jeu original.
- 3. Si le jeu réduit par ESTSFD d'un jeu sous forme normale n'a qu'une seule issue, cette issue est un équilibre de Nash du jeu original.
- 4. Si le jeu réduit par ESTSFD d'un jeu sous forme normale n'a qu'une seule issue, cette issue est le seul équilibre de Nash du jeu original.
- 5. Si le jeu réduit par ESTSSD d'un jeu sous forme normale n'a qu'une seule issue, cette issue est le seul équilibre de Nash du jeu original.
- 6. Une stratégie d'équilibre de Nash d'un jeu sous forme normale n'est jamais éliminée par ESTSFD.
- 7. Une stratégie d'équilibre de Nash d'un jeu sous forme normale n'est jamais éliminée par ESTSSD.

Question 3.3:

Considérez le jeu suivant à deux joueurs :

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	2	7	0
	7	5	0	1
a_2	5	3	5	0
	2	3	2	1
a_3	7	2	0	0
	0	5	7	1
a_4	0	0	0	10
	0	-2	0	-1
a_5	3	2	3	1
	5	3	0	6

- 1. Trouvez les stratégies strictement dominées (telles que définies au chapitre 1)
- 2. On étend maintenant la définition de la dominance (en fait, la définition suivante est la définition habituelle), en considérant aussi les stratégies mixtes : Une stratégie pure x_i dans un jeu sous forme normale est dominée strictement par la stratégie mixte P_i , si l'espérance d'utilité obtenu avec P_i est strictement plus grande que l'utilité obtenu avec x_i , quel que soit le choix de stratégies des autres joueurs.
- 3. Trouvez les stratégies strictement dominées du jeu ci-dessus en utilisant la nouvelle définition de dominance.
- 4. Trouvez le jeu réduit par élimination successive de toutes les stratégies strictement dominées en utilisant la nouvelle définition de dominance.
- 5. Montrez que le joueur 1 peut justifier (ou rationnaliser, comme on dit d'après Bernheim (1984) et Pierce (1984)) son choix de a_1 , a_2 ou a_3 par une chaîne de raisonnement $(b^1, a^1, b^2, a^2, ...)$ (où $a^1, a^2, ...$ sont des stratégies du joueur 1 et $b^1, b^2, ...$ des stratégies du joueur 2) du type suivant : "1. Je crois que le joueur 2 choisira b^1 , 2. Le joueur 2 a raison de choisir b^1 , s'il croit que je choisirai a^1 , 3. Le joueur 2 a raison de croire que je choisirai a^1 , s'il croit que je crois qu'il choisira b^2 , etc." Montrez aussi que cette justification n'est pas possible pour la stratégie a_4 . Comparez avec la partie 3.

Chapitre 4

Applications

Feuille, caillou, ciseau 4.1

Nous revenons maintenant au jeu décrit au chapitre 3 et recherchons ses équilibres de Nash (qui doivent exister d'après le théorème de Nash). Soient donc $(p_1^{fe}, p_1^{ca}, p_1^{ci})$ et $(p_2^{fe}, p_2^{ca}, p_2^{ci})$ des stratégies des deux joueurs, où $0 \le$ $p_i^{fe}, p_i^{ca}, p_i^{ci} \leq 1$ et

$$p_i^{fe} + p_i^{ca} + p_i^{ci} = 1. (4.1)$$

A cause de cette dernière relation, nous pouvons nous borner à décrire les stratégies d'un joueur par deux probabilités, par exemple p_i^{fe} et p_i^{ca} , avec $p_i^f + p_i^c \le 1$. En utilisant (4.1), nous pouvons récrire l'utilité anticipée U_i d'un joueur que nous avons donnée à la dernière section comme suit

$$U_i = p_i^{fe}(3p_j^{ca} - 1) + p_i^{ca}(1 - 3p_j^{fe}) + p_j^{fe} - p_j^{ca}, i \neq j.$$
(4.2)

Cherchons les équilibres mixtes, c.-à-d. les deux pairs (p_1^{fe}, p_1^{ca}) et (p_2^{fe}, p_2^{ca}) , tel que le premier est une meilleure réponse au deuxième et le deuxième une meilleure réponse au premier.

Est-ce possible qu'à l'équilibre $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$? Supposons d'abord que $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$ et $p_1^{fe} > \frac{1}{3}$. Dans ce cas les coefficients devant p_2^{ca} et p_2^{fe} dans la fonction U_2 ((4.2) avec i=2) sont négatifs et le choix optimal du joueur 2 est $p_2^{fe}=p_2^{ca}=0$ (jouer toujours "ciseau"). Voyant le problème maintenant de la perspective du joueur 1 ((4.2) avec i = 1), avec ces choix du joueur 2 le coefficient devant p_1^{fe} est négatif et celui devant p_1^{ca} positif, donc le joueur va choisir $p_1^{ca}=1$, ce qui est une contradiction à l'hypothèse de départ que $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$.

Supposons maintenant que $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$ et $p_1^{fe} = \frac{1}{3}$. En ce cas, $p_2^{fe} = 0$ et p_2^{ca} est indéterminé. Cependant, en reprenant (4.2) de la perspective du joueur 1 pour tous les cas possibles, nous obtenons de nouveau une contradiction : quelque soit le choix de p_2^{ca} par le joueur 2, il faut que $p_1^{fe} + p_1^{ca} = 1$ (par exemple, si $p_2^{ca} < \frac{2}{3}$, il faut que $p_1^{ca} = 1$), ce qui n'est pas compatible avec l'hypothèse que $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$ et $p_1^{fe} = \frac{1}{3}$.

Supposons finalement que $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$ et $p_1^{fe} < \frac{1}{3}$. Ceci implique que $p_2^{ca} = 1$ et $p_2^{fe} = 0$, ce qui implique en revanche $p_1^{fe} = 1$, une contradiction.

Nous avons donc montré qu'il est impossible d'avoir $p_1^{ca} < \frac{1}{3}$ à l'équilibre. Une argumentation similaire montre que $p_1^{ca} > \frac{1}{3}$ est également impossible. Donc, s'il y a un équilibre en stratégies mixtes, il faut que $p_1^{ca} = \frac{1}{3}$.

Maintenant il est simple de montrer que $p_1^{fe} = \frac{1}{3}$ à l'équilibre : si $p_1^{fe} > \frac{1}{3}$, il faut que $p_2^{ca} = 0$, ce qui implique $p_1^{fe} = 0$ (dans les 3 cas possibles), ce qui est une contradiction. Si, par contre, $p_1^{fe} < \frac{1}{3} \Longrightarrow p_2^{ca} = 1 \Longrightarrow p_1^{fe} = 1$, donc de nouveau une contradiction.

Pour que (p_1^{fe}, p_1^{ca}) , (p_2^{fe}, p_2^{ca}) soit un équilibre, il est donc nécessaire que $p_1^{fe} = p_1^{ca} = p_2^{fe} = p_2^{ca} = \frac{1}{3}$ (la distribution équiprobable sur l'ensemble de stratégies pures). Intuitivement ceci est plausible (et bien compris par les petits enfants) : on joue de manière aussi "diffuse" que possible, pour minimiser la possibilité que l'autre anticipe son action.

Ce comportement est-il un équilibre?¹ On vérifie facilement que si le joueur j choisit $p_j^{fe} = p_j^{ca} = \frac{1}{3}$, le paiement du joueur i ne dépend pas de son propre choix (en fait, la formule (4.2) devient simplement $U_i = 0$). Cela implique trivialement que le choix proposé $(p_i^{fe} = p_i^{ca} = \frac{1}{3})$ est optimal (parce qu'un autre choix de (p_i^{fe}, p_i^{ca}) n'améliore pas le paiement espéré). Mais peuton déduire de cette observation qu'à l'équilibre tout joueur est libre de choisir ce qu'il veut? La réponse est fortement non. Comme nous l'avons démontré, à l'équilibre, tout joueur doit jouer $p_i^{fe} = p_i^{ca} = \frac{1}{3}$. La situation est la même que pour les équilibres en stratégies pures, vue par exemple à la section 2.2 au cas des enchères : à l'équilibre, toute stratégie a une double fonction : elle maximise le paiement du joueur et elle rend les choix des autres joueurs optimaux. Même si le premier de ces ceux aspects laisse le choix indéterminé, le deuxième est contraignant.

¹Il y a une réponse simple à cette question : parce que (i) nous avons écarté toutes les possibilités sauf une et (ii) le jeu a un équilibre en stratégies mixtes d'après le théorème de Nash (chapitre 2.3), cette dernière possibilité doit être l'équilibre. Mais avec cet argument on tirerait sa poudre aux moineaux.

67

4.2 Les penalties

Une des questions des plus importantes d'un gardien de but au football est de savoir vers quel côté du but le tireur d'un penalty tirera. Comme la vitesse du ballon lors d'un penalty dépasse facilement les 150 km/h, le ballon atteint le but en moins de 3/10 de seconde. Le gardien ne peut donc pas réagir au tir, et comme il ne va pas plonger sur l'un des côtés avant le tir, le tireur et le gardien doivent agir simultanément. Si le gardien devine le coté vers lequel le tireur tire, sa chance d'arrêter le penalty est plus grande que s'il plonge du mauvais coté ou s'il ne bouge pas. Egalement, le tireur transforme le penalty plus facilement s'il tire sur son côté naturel (à gauche pour un droitier, à droite pour un gaucher). Ces faits sont bien connus par les joueurs de football et ont été confirmés par une étude empirique de Chiappori, Levitt et Grosclause (2002), dont nous reproduisons quelques résultats à la Table 4.1. Cette table montre les probabilités de succès de penalty pour tous les penalties tirés en première division française de 1997 à 1999 et en première division italienne de 1997 à 2000, en fonction du choix du gardien et du tireur.

		Gardien		
		Bon choix	Mauvais choix	
	côté naturel	63.6	94.4	
Tireur				
	autre côté	43.7	89.3	

Table 4.1 : Probabilités de transformation de penalty en fonction du choix du gardien et des caractéristiques du tireur

Les penalties constituent donc un champ d'application intéressant pour la théorie des jeux. En fait, cet intérêt dépasse de loin l'aspect ludique de l'interaction entre gardien et tireur, entre deux joueurs de tennis ou autre, car le sport est devenu une branche économique importante. Pas seulement les salaires de certains stars sont affectés par leur action sur le terrain, mais toute une industrie en dépend. Si on se rappelle que la capitalisation boursière de Manchester United, le célèbre club de football anglais, dépasse les 1.3 milliards de livres (3.3 milliards de SFr.),² on comprend mieux l'importance d'un penalty dans un match de la Champions' League européenne.

²Données de la London Stock Exchange de février 2004.

Etant donné notre discussion de la situation stratégique du penalty auparavant, nous décrivons le jeu entre gardien et tireur de façon simplifiée comme un jeu sous forme normale avec des ensembles de stratégies X_G $X_T = \{G, C, D\}$ pour les deux joueurs, ou G dénote "tirer/plonger à gauche", C "tirer/rester au centre" et D "tirer/plonger à droite" et le côté est toujours vu du point de vue du tireur. L'objectif du gardien est évidemment de minimiser la probabilité que le penalty soit transformé et celui du tireur d'en maximiser la probabilité. Comme on a vu, ces probabilités dépendent des choix des joueurs, et nous les notons dans une matrice d'issues comme ci-dessous:

$$\begin{array}{c|cccc} & Gardien \\ \hline & G & C & D \\ \hline & G & P_G & \pi_G & \pi_G \\ \hline \text{Tireur} & C & \mu & 0 & \mu \\ & D & \pi_D & \pi_D & P_D \\ \end{array}$$

Les données dans cette matrice signifient que, par exemple, si le tireur tire à gauche et le gardien reste au centre, le penalty est transformé avec probabilité π_G . Cette présentation des faits simplifie certains aspects du penalty, en particulier en supposant que le penalty n'est certainement pas transformé si le tireur tire au centre et le gardien reste au centre (en réalité il y a quand-même une faible probabilité que même dans cette situation le gardien n'attrape pas le ballon). Comme nous avons vu, en pratique ces probabilités peuvent même être cernées plus précisément, ce que nous faisons dans l'hypothèse suivante. Cette hypothèse est formulée ici pour le cas où le tireur est droitier (ce qui est le cas pour environ 85 % des joueurs de la première division française), donc dans le cas où son côté naturel est G.

Hypothèse: Les probabilités de succès du tireur satisfont

$$\pi_D > P_G, \qquad \pi_G > P_D$$
 (CD)
 $\pi_D > \mu, \qquad \pi_G > \mu$ (CC)

$$\pi_D > \mu, \qquad \pi_G > \mu \tag{CC}$$

$$\pi_G \ge \pi_D, \qquad P_G \ge P_D$$
(CN)

$$\pi_D - P_R \ge \pi_G - P_G \tag{TD}$$

Ces quatre conditions sont naturelles pour tout joueur de football et en vue de l'évidence présentée à la table 4.1. Condition (CD) ("côté différent")

dit que le tireur marquera plus facilement si son tir est dirigé vers le côté qui n'est pas choisi par le gardien. De façon similaire, condition (CC) ("côté centre") dit que, si le gardien plonge sur un côté, le tireur marquera plus facilement s'il tire sur l'autre côté que s'il tire au centre. Condition (CN) ("côté naturel") dit que le tireur transforme le penalty plus facilement sur son côté naturel que sur l'autre, que le gardien devine ou non le bon côté. Finalement, condition (TD) ("tirs difficiles") dit que les tirs sur le côté naturel sont plus difficiles à arrêter pour le gardien.³

Ces conditions facilitent la recherche des équilibres. Comme tout footballeur sait, on s'aperçoit vite formellement que le jeu n'a pas d'équilibres en stratégies pures. La raison en est la même que dans le jeu de feuille-caillouciseau vu à la section 4.1: si un des deux joueurs choisit une action avec certitude, l'autre a une réponse optimale unique, qui rend le choix du premier joueur non-optimal. Mais le jeu a un équilibre unique en stratégies mixtes que nous décrivons dans la proposition suivante. Dénotons par (g_G, g_C, g_D) , $0 \le g_k \le 1$, la stratégie mixte du gardien et par (t_G, t_C, t_D) , $0 \le t_k \le 1$, celle du tireur.

Proposition 4.1 : A l'équilibre mixte unique du jeu entre gardien et tireur, le tireur choisit tous ses trois actions avec probabilité strictement positive. Si

$$\mu \le \frac{\pi_G \pi_D - P_G P_D}{\pi_D + \pi_G - P_D - P_G} \tag{RR}$$

le gardien randomise entre G et D et ne reste jamais au centre $(g_C = 0)$. Si la condition (RR) ("randomisation restreinte") n'est pas satisfaite, donc si la probabilité de transformer le penalty avec un tir au centre est suffisamment grande, le gardien choisit tous ses trois actions avec probabilité strictement positive.

Démonstration : Pourqu'un équilibre avec $g_k > 0$ pour k = G, C, D existe il faut que le gardien soit indifférent entre ses trois actions. Il est

 $^{^3}$ Le tireur rate le penalty, soit s'il tire à l'extérieur, soit si le gardien l'attrappe. Dénotons par s_X ($X \in \{G, D\}$) la probabilité que le gardien choisisse le bon côté et arrête le penalty. Si le gardien choisit le mauvais côté, le tireur marque le but (probabilité π_X), s'il ne tire pas à l'exterieur (probabilité $1 - \pi_X$). Si le gardien choisit le bon côté, la probabilité de rater le penalty $(1 - P_X)$ est égale à la somme de la probabilité de tirer à l'extérieur $(1 - \pi_X)$ et de la probabilité que le gardien l'arrête (s_X) . Donc $P_X = \pi_X - s_X$. (TD) est équivalent à $s_R \geq s_L$ (rappel : le joueur est droitier).

indifférent entre G et C si et seulement si

$$t_G P_G + t_C \mu + t_D \pi_D = t_G \pi_G + t_D \pi_D$$

et indifférent entre D et C si et seulement si

$$t_G \pi_G + t_C \mu + t_D \pi_D = t_G \pi_G + t_D \pi_D$$

En combinant ces deux équations et en utilisant $t_C = 1 - t_G - t_D$ on obtient

$$t_G = \frac{\mu(\pi_D - P_D)}{(\pi_G - P_G)(\pi_D - P_D) + \mu(\pi_G + \pi_D - P_G - P_D)}$$
(4.3)

$$t_C = \frac{(\pi_G - P_G)(\pi_D - P_D)}{(\pi_G - P_G)(\pi_D - P_D) + \mu(\pi_G + \pi_D - P_G - P_D)}$$
(4.4)

$$t_D = \frac{\mu(\pi_G - P_G)}{(\pi_G - P_G)(\pi_D - P_D) + \mu(\pi_G + \pi_D - P_G - P_D)}$$
(4.5)

Grâce à l'hypothèse (TD), ces trois chiffres sont toutes strictement positives et inférieures à 1.

D'autre coté, pour qu'un équilibre avec $t_k > 0$, k = G, C, D, existe, il faut que le tireur soit indifférent entre ses trois actions. Il est indifférent entre G et C si et seulement si

$$q_G P_G + q_C \pi_G + q_D \pi_G = q_G \mu + q_D \mu \tag{4.6}$$

et indifférent entre D et C si et seulement si

$$g_G \pi_D + g_C \pi_D + g_D P_D = g_G \mu + g_D \mu \tag{4.7}$$

En combinant ces deux équations et en éliminant $g_G = 1 - g_C - g_D$, on obtient

$$g_C = \frac{\mu(\pi_D + \pi_G - P_D - P_G) - (\pi_G \pi_D - P_G P_D)}{(\pi_G - P_G)(\pi_D - P_D) + \mu(\pi_G + \pi_D - P_G - P_D)}$$

Cette expression est négative ou zéro si et seulement si condition (RR) est satisfaite. Autrement elle est strictement entre 0 et 1 et on vérifie vite que les valeurs pour g_G et g_D qui découlent de cette expression en combinaison avec (4.6) et (4.7) sont strictement entre 0 et 1.

Si (RR) est vérifié, le tireur peut être indifférent entre ses trois actions seulement si $g_C = 0$. Dans ce cas, (4.6) et (4.7) impliquent

$$g_G = \frac{\mu(\pi_G - P_D)}{\pi_G \pi_D - P_G P_D}$$

$$g_D = \frac{\mu(\pi_D - P_G)}{\pi_G \pi_D - P_G P_D}$$
(4.8)

$$g_D = \frac{\mu(\pi_D - P_G)}{\pi_G \pi_D - P_G P_D} \tag{4.9}$$

Grâce aux hypothèses (CD) et (CC) ces deux expressions sont strictement entre 0 et 1.

Jusqu'à maintenant nous avons confirmé et caractérisé l'équilibre postulé dans l'énoncé de la proposition. Nous laissons au lecteur de vérifier qu'aucune autre constellation (telle que $t_G = 0, t_C > 0, t_D > 0$) est possible à l'équilibre. Malheureusement il n'existe pas de raccourci simple pour cette vérification.

L'équilibre trouvé à la proposition 4.1 permet d'identifier plusieurs caractéristiques de l'interaction entre gardien et tireur de penalty. La proposition suivante en regroupe quelques unes, qui sont vérifiées statistiquement par les données des ligues françaises et italiennes présentées dans le travail de Chiappori, Grosclause et Levitt (2002) cité ci-dessus.

Proposition 4.2: A l'équilibre unique du jeu entre gardien et tireur de penalty

- 1. Le tireur choisit le centre plus souvent que le gardien.
- 2. Le tireur choisit son côté naturel (qui est G, par hypothèse) plus souvent que l'autre côté D.
- 3. Le choix (G,G) (le tireur choisit G et le gardien choisit G) est plus probable que (G, D) qui en revanche est plus probable que (D, D).

Nous laissons la démonstration de cette proposition, qui utilise les formules dérivées dans la démonstration de la proposition 4.1, au lecteur comme simple exercice.

4.3 Les offres publiques d'achat

Considérons une société anonyme dont les actions sont répandues dans un groupe d'actionnaires au sein duquel personne ne possède un paquet d'actions important. Pour simplifier supposons que les actions soient répandues également et que chaque actionnaire ne détienne qu'une seule action. Les actions sont librement transmissibles, et aucune restriction de droit de vote n'est imposée. Sous le management en place, la valeur de l'action est égale à k. Cependant, si la compagnie était gérée par un autre groupe de dirigeants, ce nouveau management pourrait réorganiser l'entreprise et réaliser des changements qui élèveraient la valeur de l'action à v > k.

La façon typique de réaliser ces changements sur un marché de capital libre est de faire une offre publique d'achat. Supposons donc que le groupe de dirigeants extérieurs (le "raider") propose l'offre suivante, dite conditionnelle : il propose le prix de b, v > b > k, par action aux actionnaires, et si au moins la moitié des actionnaires sont prêts à vendre leurs actions, le raider achète les actions qui lui sont offertes. Si moins que la moitié d'actions sont offertes, le raider retire l'offre, le management ne change pas et la valeur de l'entreprise reste k. On note que l'offre du raider est inférieure à la valeur qu'il peut réaliser s'il obtient contrôle de l'entreprise, parce qu'il doit tirer un certain gain de l'opération pour récupérer les coûts de l'offre.

Pour modéliser ce problème par un jeu sous forme normale, nous supposons que, étant donné l'offre b, tous les actionnaires décident simultanément de vendre ou non. Ayant étudié ce jeu parmi les actionnaires, on peut ensuite se demander quelle est la meilleure offre b que le raider puisse proposer; mais nous n'aborderons cette question que brièvement.

Nous analyserons le problème en utilisant deux cadres différents, qui prennent des perspectives différentes par rapport au poids de l'actionnaire individuel dans cette situation. Essentiellement si la compagnie a un grand nombre d'actionnaires, tout actionnaire individuel a un poids pratiquement négligeable dans la détermination de l'issue de l'offre. Quand même, sa voix compte, car la décision collective est le résultat de toutes les décisions individuelles. Le premier modèle que nous considérons souligne le premier aspect en supposant que toute décision individuelle est en fait négligeable et que seulement la décision agrégée compte. Le deuxième modèle suppose, par contre, que chaque voix compte et que la décision agrégée est littéralement la somme des décisions individuelles.

Pour modéliser la première approche, nous prenons l'approche du "continu d'agents", introduite dans la théorie des jeux par Aumann (1964). Par analogie à la théorie mathématique d'intégration, on suppose dans cette approche que l'ensemble d'actionnaires est donnée par l'intervalle [0,1] (donc tout actionnaire a un "nom" $a \in [0,1]$) et que le poids de tout ensemble A d'actionnaires est donné par la "mesure" de A, dénotée |A|. Si A est un intervalle,

 $A = [a, b] \subset [0, 1]$, la mesure de A est simplement sa longueur, |A| = b - a, et si A est composé de plusieurs intervalles, sa mesure est la somme des longueurs de ces intervalles.⁴ En particulier, un point (un actionnaire individuel) a un poids de 0 et, par conséquence, tout groupe fini d'actionnaires a un poids de 0.

Le jeu sous forme normale qui décrit le problème de l'offre publique d'achat est donc donné par $\mathcal{N} = [0, 1], X_i = \{O, N\}, i \in \mathcal{N}$, et

$$u_{i}(x) = \begin{cases} b & \text{si } x_{i} = O \text{ et } |A_{O}(x)| \ge \frac{1}{2} \\ v & \text{si } x_{i} = N \text{ et } |A_{O}(x)| \ge \frac{1}{2} \\ k & \text{si } |A_{O}(x)| < \frac{1}{2} \end{cases}$$
(4.10)

Ici $x_i = O$ ("oui") est la stratégie d'accepter l'offre, $x_i = N$ ("non") de ne la pas accepter, $x = \{x_i\}_{i \in [0,1]}$ est l'ensemble de toutes les décisions individuelles (l'issue du jeu), et $|A_O(x)|$ la proportion (la mesure) des "oui" dans la totalité des décisions.

La formule (4.10) montre immédiatement le problème fondamental de tout actionnaire dans cette situation. Si il peut être sûr que l'offre réussit, il a intérêt à la rejeter individuellement, afin d'obtenir v(>b) au lieu de b. Mais si tout actionnaire se comporte de cette façon, l'offre échoue et il obtient k(< b).

Formellement, à un équilibre pure de ce jeu, est-il possible que l'offre réussit? La réponse est simple et négative. Pour en voir la raison, supposons que l'équilibre x est tel que l'offre réussit avec $|A_O(x)| \ge \frac{1}{2}$. Etant donné ce comportement des autres, tout joueur avec $x_i = O$ a intérêt a choisir N au lieu de O, donc x n'est pas un équilibre. D'autre part on vérifie facilement que toute issue avec $|A_O(x)| < \frac{1}{2}$ est un équilibre. Donc à l'équilibre, l'offre qui pourtant augmente la valeur de l'entreprise et constituerait un gain pour chaque actionnaire - doit échouer. Cela est le problème classique du "passager clandestin", identifié dans le contexte des marchés financiers pour la première fois par Grossman et Hart (1980).

Considérons maintenant le deuxième modèle, qui prend en considération la voix de tout actionnaire individuel. Supposons donc qu'il y ait n actionnaires et que l'offre réussit si au moins $\frac{n}{2}$ actionnaires sont prêts à vendre leurs actions. La forme normale du jeu est similaire a celle du jeu défini

⁴En théorie d'intégration on montre que cette méthode (en prenant des limites) permet de construire une mésure pour presque tout sous-ensemble de [0, 1]. Les ensembles ainsi construits sont appelés mesurables.

auparavant : $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}, X_i = \{O, N\}, i \in \mathcal{N}, \text{ et}$

$$u_{i}(x) = \begin{cases} b & \text{si } x_{i} = O \text{ et } |A_{O}(x)| \ge \frac{n}{2} \\ v & \text{si } x_{i} = N \text{ et } |A_{O}(x)| \ge \frac{n}{2} \\ k & \text{si } |A_{O}(x)| < \frac{n}{2} \end{cases}$$

où maintenant $|A_O(x)|$ dénote le nombre de x_i égaux à O.

Cherchons d'abord les équilibres en stratégies pures de ce jeu. Comme dans le modèle continu, le problème du passager clandestin présente un obstacle à la réussite de l'offre. Mais dans le cadre du modèle discret l'offre peut quand même réussir, parce que tout joueur a une incitation non-négligeable, bien que faible, de considérer l'impact de sa décision sur l'issue du jeu. Il est clair, pour les mêmes raisons qu'auparavant, qu'à l'équilibre, l'offre ne peut pas réussir avec $|A_O(x)| > n/2$: chaque joueur avec $x_i = O$ gagne en déviant. Mais différemment du cas continu toute issue avec $|A_O(x)| = n/2$ constitue un équilibre. C'est parce que à cette issue chaque joueur avec $x_i = O$ est un pivot : sans elle l'offre échoue et, par conséquent, sa décision de dévier entraînerait la réduction de son paiement de b à k. Comme dans le cas continu, on vérifie facilement qu'il y a un grand nombre d'équilibres auxquels l'offre échoue, en particulier, l'issue $x_i = N$ pour tout i.

L'équilibre (ou plus précisément, l'ensemble d'équilibres) auquel l'offre réussit est pourtant un peu particulier en ce qu'il est asymétrique. La situation donnée étant symétrique (tout actionnaire est confronté au même problème), il n'est pas évident que les actionnaires arrivent à se coordonner sur une issue asymétrique, surtout quand les paiements proposés à un sousgroupe sont plus grands que ceux pour l'autre. Il semble donc intéressant de rechercher des équilibres symétriques du jeu.

Nous en avons vu un déjà : l'équilibre $x_i = N$ où tout joueur refuse l'offre. Mais y-a-t-il des équilibres symétriques où l'offre réussit? D'après ce que nous venons de discuter, un tel équilibre doit être en stratégies mixtes, s'il existe du tout. Supposons donc que tout joueur accepte l'offre avec la même probabilité $p \in (0,1)$.

Dans ce cas, le nombre d'actions offertes à l'équilibre, S, est une variable aléatoire

proba
$$(S=s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}$$

et la probabilité du succès de l'offre est égal à

proba
$$(S \ge \frac{n}{2}) = \sum_{s=n/2}^{n} {n \choose s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Appelons cette probabilité $Q^n(p)$. A l'équilibre mixte tout actionnaire doit être indifférent entre ses deux actions "O" et "N". Le paiement moyen avec l'action "N" est

$$Q^{n-1}(p)v + (1 - Q^{n-1}(p))k$$

Pour décrire le paiement avec l'action "O" il faut une autre probabilité que $Q^n(p)$, parce que le seuil nécessaire pour le succès de l'OPA est maintenant $\frac{n}{2}-1$ (le vote du joueur en question étant déjà assuré). Donc la probabilité de succès en ce cas est

$$\widehat{Q}^{n-1}(p) = \text{proba } (S \ge \frac{n}{2} - 1) = \sum_{s=n/2-1}^{n-1} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Pour que le joueur soit indifférent entre ses deux actions il est donc nécessaire que

$$Q^{n-1}(p)v + (1 - Q^{n-1}(p))k = \widehat{Q}^{n-1}(p)b + (1 - \widehat{Q}^{n-1}(p))k$$
(4.11)

Pour "résoudre" cette égalité (c.-à-d. trouver le p qui y satisfait), notons d'abord que nous avons vu que, pour p=0, (4.11) est satisfait avec égalité, et que pour p=1, on a l'inégalité < stricte. Donc la question est si p=0 est la seule solution de (4.11) ou s'il y a un $p \in (0,1)$ qui résout (4.11) également. En reprenant la définition de $Q^n(p)$ nous voyons que

$$Q^n(p) < \widehat{Q}^n(p),$$

cependant, par construction,

$$b-k < v-k$$

Donc le côté gauche de l'équation (4.11) n'est pas forcément plus petit ou plus grand que le côté droit; il n'est donc pas à priori exclut qu'une solution intérieur de (4.11) existe. Appelons donc

$$H(p) = Q^{n-1}(p)(v-k) - \widehat{Q}^{n-1}(p)(b-k)$$

la différence des côtés gauches et droits de (4.11).

Il y a maintenant deux voies principales pour trouver des solutions de l'équation H(p)=0. Une alternative est d'utiliser la définition de $Q^n(p)$ et les propriétés des coefficients binomiaux pour trouver une solution explicite générale. Normalement cette façon de procéder ne donne que des solutions dans les plus simples des cas, et une solution générale sous forme explicite est impossible d'obtenir. Ce qu'on fait au lieu de cela est donc souvent de programmer l'équation numériquement pour des différentes valeurs des paramètres, de voir quelles sont les solutions dans ces cas spécifiques et d'en tirer des leçons plus générales.

La Figure 4.1 montre une telle simulation de la fonction H pour le cas k=100, b=115, v=120 et n=10. La graphique montre que dans ce cas une solution intérieure existe, $p\approx 0.58$. Des simulations plus extensives montrent qu'une solution intérieure unique existe dans tous les cas étudiés. Même si cette réponse n'est pas aussi satisfaisante sur le plan théorique que l'obtention d'une solution explicite générale de l'équation, (4.11), ce genre de réponse suffit pour la plupart des analyses appliquées.

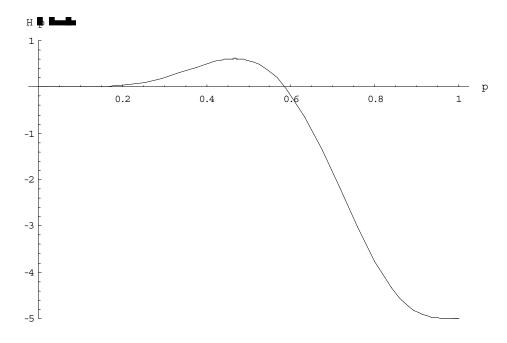


Fig. 4.1 – La détermination numérique du zéro de la fonction H

77

4.4 Problèmes

Question 1:

On prend ici une perspective simplifiée (et cynique) des litiges juridiques. Deux parties, 1 et 2, se disputent lors d'un procès. La partie gagnante obtient la valeur litigieuse, v > 0. Comme à priori leur chances de succès sont égales, la partie qui a l'avocat le plus cher gagne (en cas d'égalité le juge tire le gagnant au sort). Chaque partie paie ses propres frais d'avocat, si elle a gagné ou non. Il y a deux types d'avocat : les avocats bon marché, qui coûtent f_B , et les chers, qui coûtent f_C , $0 < f_B < f_C < v$.

- 1. Décrivez cette interaction en tant que jeu sous forme normale.
- 2. Trouvez les stratégies faiblement dominées.
- 3. Trouvez les équilibres de Nash.
- 4. Supposez maintenant que la partie perdante paie non seulement ses propres frais d'avocat, mais aussi ceux de la partie gagnante. Donnez la forme normale de ce jeu et trouvez ses équilibres de Nash. Comparez avec la partie 3.

Question 4.2:

Modélisons la concurrence entre les partis politiques ou les politiciens. On suppose qu'il y a k partis, qui choisissent simultanément leur position dans le spectre de positions politiques. Dénotons ce spectre de positions par l'intervalle [0,1] (le 0 représentant l'extrême gauche, le 1 l'extrême droite) et le choix d'une position par $x_i \in [0,1]$. Les préférences de la population sont réparties uniformément sur cet intervalle. Chaque électeur vote pour le parti dont la position s'approche le plus de ses propres convictions. Si une position est occupée par k>1 partis différents, chacun de ces partis obtient 1/k des votes donnés à cette position.

- 1. Déterminez les équilibres de Nash du jeu entre les partis pour le cas k=2.
- 2. Déterminez les équilibres de Nash pour le cas k=3.
- 3. Qu'en est-il du cas $k \geq 4$?

Question 4.3:

On considère deux entreprises qui veulent promouvoir des produits compétitifs. Le produit de l'entreprise A et celui de l'entreprise B se ressemblent fortement; ainsi les consommateurs potentiels seraient indifférents entre les deux produits, s'ils n'étaient influencés par la publicité. Chaque entreprise possède un certain budget destiné a la promotion télévisée de son produit. Les budgets de marketing des firmes A et B leur permettent d'acheter respectivement 2 (pour A) et 3 (pour B) heures d'antenne.

L'impact de cette publicité dépend des heures de diffusion. On distingue deux périodes au cours de la journée, la soirée entre 6 et 10 heures ("prime time", dénoté par S) et le reste de la journée (dénoté par R).

Les hypothèses simplificatrices suivantes sont effectuées :

- **H1** Chaque entreprise ne peut acheter que des heures entières, mais elle peut choisir librement les emplacements sur la grille des programmes de ses heures de publicité au cours de la journée.
- **H2** Les décisions concernant les heures achetées se négocient un certain temps à l'avance, et ne sont pas publiques.
- H3 Le prix des publicités est le même pour la période S que la période R.
- **H4** Les téléspectateurs regardent la TV soit à la période S, soit a la période R. Au cours de la soirée (S), 80% des spectateurs sont branchés. Tandis, qu'au cours de la période R, les 20% restants sont devant le récepteur.
- H5 Si durant une des deux périodes, une entreprise acquiert plus d'heures de publicité que sa concurrente, la totalité de l'audience de cette période est convaincue et achète son produit. Si durant une période, chaque entreprise possède le même nombre d'heures de publicité, où si aucune entreprise n'effectue de publicité pendant cette période, la moitié de l'audience achète le produit A et l'autre moitié le produit B.
 - 1. Décrivez l'interaction entre les deux entreprises en tant que jeu sous forme normale.
 - 2. Déterminez le jeu réduit par ESTSSD. Quel est le jeu réduit par ESTSFD?
 - 3. Quelles sont les stratégies prudentes de chaque entreprise ? Qu'en déduisezvous ?
 - 4. Trouvez les équilibres de Nash de ce jeu. Commentez.

Question 4.4:

Montrez que, sous les hypothèses émises à la section 4.2, à l'équilibre unique du jeu entre gardien et tireur de penalty ...

4.4. PROBLÈMES 79

- 1. le tireur choisit le centre plus souvent que le gardien.
- 2. le tireur choisit son côté naturel (qui est G, par hypothèse) plus souvent que l'autre côté D.
- 3. le choix (G, G) (le tireur choisit G et le gardien choisit G) est plus probable que (G, D) qui en revanche est plus probable que (D, D).

Chapitre 5

Interprétation : Stabilité évolutionnaire

Dans ce chapitre, nous considérons des jeux sous forme normale dans un contexte très différent de celui, des agents égoïstes, envisagé lors des sections précédentes. Nous étudions des jeux dont les acteurs sont des animaux, ou même des plantes, dans leur lutte de long terme pour leur survie au travers du processus de sélection naturelle. Depuis l'oevre célèbre de Darwin "de l'Origine des Espèces", les biologistes ont appris à cerner le processus de l'évolution biologique comme un processus dans lequel les espèces les mieux adaptées à leur environnement naturel évincent d'autres espèces moins bien adaptées. De façon similaire, et de manière plus importante, ces traits au sein d'une espèce, "phénotypes" en termes biologiques, qui permettent d'accroître la capacité individuelle d'adaptation, confèrent un plus grand succès reproducteur à leur porteurs qu'aux autres individus de la population. Si ces traits sont héréditaires ("tel père, tel fils"), ils ont par conséquent tendance à devenir statistiquement plus fréquents dans la population, et à dominer la population à long terme ("la survie du mieux adapté").

La théorie a évolué grâce à la perception importante, principalement due à Maynard Smith (1982), selon laquelle le succès de modifications génétiques dépend dans de nombreux cas non seulement de facteurs physiques et chimiques environnementaux, mais aussi de la distribution de certaines caractéristiques au sein d'une population donnée. Le ratio sexuel optimal d'une femelle donnée, par exemple, c.-à.-d. le nombre relatif de progénitures mâles et femelles que la femelle produit, dépend typiquement du ratio sexuel des autres femelles de la population, et non seulement de l'habitat ou du métabo-

lisme de la population. Des exemples similaires sont constitués par le montant d'énergie investie par des animaux pour défendre un territoire particulier, le temps que les mâles passent à attendre les femelles à des endroits précis, ou, pour prendre un exemple de la vie des plantes, la forme de croissance d'une plante dans un habitat très peuplé. Dans tous ces cas, différents phénotypes peuvent être considérés comme impliqués dans un "jeu stratégique" entre eux, où le "paiement" d'un phénotype dans une population donnée est son adéquation Darwinienne, mesurée par le succès reproducteur des individus porteurs du phénotype. Dans ce sens, phénotypes et stratégies sont la même chose, vue de perspectives différentes : "Une 'stratégie' est un phénotype comportemental; c.-à-d. une spécification de ce qu'un individu fera dans toute situation où il peut se trouver" (Maynard Smith, 1982).

Dans ces jeux, qui sont joués au travers d'un grand nombre de rencontres des membres de la population, il n'y a évidemment aucune optimisation. Les choix stratégiques sont inconscients, car les individus sont génétiquement programmés pour se comporter d'une certaine manière. La perspective est purement statistique : à n'importe quel moment dans le temps, différentes stratégies coexistent dans la population étudiée, et l'évolution de la population est déterminée par les performances au sein des interactions des membres de la population. Dès lors, la population évolue, et avec elle, la distribution des stratégies ou des phénotypes. Mais cette évolution possède deux principaux composants. Le premier est lié à l'héritage, où plus précisément à l'invariabilité génétique, lequel crée la continuité : un ensemble donné de stratégies évolue à travers le temps, avec certains éléments de cet ensemble gagnant ou perdant en importance au fur et à mesure que l'évolution progresse. Le second composant de ce processus de sélection naturelle est fondamentalement différent et est lié à la variation génétique, lequel crée une discontinuité. En fait, tous les phénotypes ne sont pas toujours parfaitement génétiquement transmis d'une génération à l'autre, ce qui implique que des modifications occasionnelles peuvent survenir et concurrencer les phénotypes existant en vue d'un succès. Si ces mutants ne sont pas viables (comme dans la plupart des cas), ils disparaissent; s'ils s'avèrent supérieurs, ils envahissent la population et évincent les phénotypes préexistants.

La théorie générale des jeux évolutionnaires inclus, en conséquence, un processus de changements continus, génétiquement transmis, et un élément, stochastique, de modifications discontinues de certains paramètres du processus. Joindre ces deux éléments au sein d'un même modèle est une tâche trop complexe dans le cadre de ce cours. En conséquence nous considérons

deux modèles partiels de l'évolution. Premièrement un modèle statique qui décrit quelques éléments du problème de la mutation, et ensuite un modèle dynamique dans lequel l'héritage génétique est parfait.

5.1 Mutation : Stabilité contre les mutations

Comme discuté ci-dessus, pour décrire l'évolution de différents phénotypes dans une population il faut utiliser un modèle dynamique dans lequel les caractéristiques principales des individus sont génétiquement transmissibles. Dans le cas où cette transmission est parfaite et déterministe, la distribution initiale des caractéristiques détermine la distribution de long terme. Nous étudierons ce phénomène de façon plus détaillée au cours de la prochaine section. Cependant, avant d'aborder ce problème qui est mathématiquement plus complexe, nous traiterons le problème des mutations, qui peut être étudié dans un modèle simple et statique.

Les changements évolutionnaires sont causés par des variations génétiques qui se produisent de temps à autre et de façon aléatoire dans la transmission du matériel génétique des parents aux descendants. Il y a des modifications de phénotypes, des nouveaux comportements et caractéristiques physiques et finalement de nouvelles espèces parce que la reproduction des individus n'est pas parfaite. Si cette reproduction n'est pas parfaite, c.-à.-d. si un membre d'une nouvelle génération démontre un trait qui diffère de façon significative de ses parents, on parle de mutation. Le plus souvent de tels mutants ne sont pas viables, donc ils meurent immédiatement ou leur type disparaît à plus long terme. De temps en temps, par contre, ces mutants réussissent et arrivent à pénétrer la population, même à évincer les anciens types. Dans ce cas on dit que l'ancienne distribution de phénotypes n'était pas stable. Dans ce qui suit nous modélisons le concept de stabilité évolutionnaire (stabilité contre les mutations) formellement, sans utiliser un cadre explicitement dynamique.

Comme discuté dans l'introduction à ce chapitre, nous identifions un phénotype à une stratégie dans un jeu entre les individus d'une population. Un exemple de ce type de problème est le comportement dans des conflits sexuels ou de territoire (e.g., les luttes spectaculaires entre cerfs mâles). Spécifiquement nous supposons que la population est infinie et suffisamment dispersée pour que les membres se rencontrent de façon aléatoire et non-répétée afin d'éviter tout effet d'apprentissage bilatérale. Pour simplifier supposons que cette dispersion soit parfaite de sorte que les rencontres des individus sont

5.1. MUTATION 83

équiprobables. Tout individu est programmé à jouer une stratégie, et son succès biologique est mesuré par une fonction d' 'adéquation Darwinienne' (Darwinien fitness) dont les valeurs dépendent de sa propre stratégie et de la stratégie adoptée par les individus qu'il rencontre. Sur le plan empirique, l'adéquation d'un individu est mesurée par le nombre de descendants qu'il produit, au sens strict du terme, si on suppose que la reproduction se fait de manière asexuelle (parthénogénèse).¹

Nous décrivons l'interaction des membres de la population par un jeu sous forme normale à deux joueurs. Le modèle de base, tel que développé par Maynard Smith et Price (1973) et que nous présentons ici, suppose que le jeu est symétrique, c.-à-d. que $X_1 = X_2$ et $u_1(i,j) = u_2(j,i)$ pour $i,j \in X_1$, donc que la situation stratégique est identique pour les deux participants.² Cette hypothèse exclut des situations asymétriques telles que des conflits parents-enfants ou ceux entre un propriétaire (d'un territoire, par exemple) et un envahisseur. Nous pouvons donc décrire le jeu par la donnée simple de $G = (\{1,2\}, X, u)$, où $X = X_1 = X_2$ et $u = u_1$. Ici u(i,j) dénote le gain en termes d'adéquation Darwinienne pour l'individu qui adopte la stratégie i quand il rencontre un individu de type (c.-à-d. qui adopte la stratégie pure) j.

Supposons maintenant que toute la population utilise la stratégie $i \in X$ (peut-être comme résultat d'une sélection naturelle précédente). La question principale de cette section est d'étudier sous quelles conditions i est "stable" contre une "mutation" $j \in X$. Pour aborder cette question, supposons donc qu'une petite part de la population, de taille $\epsilon > 0$, joue j au lieu de i. Dans cette nouvelle situation, l'adéquation anticipée et moyenne (sous les hypothèses faites, ces deux concepts sont identiques grâce à la loi des grands nombres) d'un individu de type i est égale à

$$(1 - \epsilon)u(i, i) + \epsilon u(i, j),$$

tandis que celle d'un mutant est

$$(1 - \epsilon)u(j, i) + \epsilon u(j, j).$$

¹Formellement nous supposons donc que la réproduction est asexuelle. Le cas plus réaliste de la réproduction sexuelle (espèces diploides) est légèrement différent en ce que le succès génétique d'un individu dépend aussi de son parténaire. En pratique cette différence peut souvent être negligée (pour une discussion, voire Maynard Smith, 1982).

²Le "dilemme du prisonnier" et la "réunion de la commission" sont deux exemples de jeux symétriques, "Bach ou Stravinsky" et les enchères du chapitre 2.2 sont des jeux asymétriques.

Donc pour tout ϵ , la mutation a moins de succès que le comportement initial si

$$(1 - \epsilon)u(i, i) + \epsilon u(i, j) > (1 - \epsilon)u(j, i) + \epsilon u(j, j)$$

$$(5.1)$$

Parce que nous considérons la situation où la population joue i et quelques mutants jouent j, il n'est certainement pas nécessaire de considérer cette inégalité pour tout ϵ . En fait, pour qu'une mutation ne puisse pas se propager, il suffit qu'il existe un seuil limite de mutants tel que l'inégalité (5.1) soit satisfaite pour des nombres de mutants au-dessous de ce seuil. Dans un tel cas, on n'observera jamais une évolution du nombre de mutants au-dessus de ce seuil. Cette idée constitue le contenu de la définition suivante. Pour être plus générale, nous formulons le concept directement en termes de stratégies mixtes.

Définition : Une stratégie mixte x du jeu G est appelée stable par rapport à l'évolution (SPRALE), si pour toute stratégie mixte $y \neq x$ il existe un nombre ε_y , $0 < \varepsilon_y < 1$, tel que $(1 - \epsilon)u(x, x) + \epsilon u(x, y) > (1 - \epsilon)u(y, x) + \epsilon u(y, y)$ pour tout ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_y$.

La notion d'une stratégie SPRALE est basée sur l'idée de l'apparition graduelle de mutants. Si donc dans une population SPRALE, une nouvelle stratégie apparaît de façon isolée, en tout petits nombres, elle ne s'imposera pas. Si par contre une stratégie envahit une population brusquement (de façon discontinue) le concept ne s'applique pas. Dans ce cas, il se peut bien que la nouvelle stratégie évince l'ancienne, même si celle-ci est SPRALE, parce que le changement est discontinu.

Ce qui est intéressant maintenant est que la notion de stabilité évolutionnaire, bien que très différente de la notion d'optimalité stratégique, est étroitement liée au concept de l'équilibre de Nash. En fait, il est facile de voir que si une stratégie x est SPRALE, (x,x) est un équilibre de Nash.

Pour voir cela, il suffit de poser $\varepsilon = 0$ dans la condition (5.1), ce qui montre que s'il n'y a pas de mutants (donc si un déviant peut être sûr de jouer contre x), une stratégie x qui est SPRALE est au moins aussi bonne que toute autre stratégie, étant donné que l'autre joueur joue x. Cela montre que le concept de SPRALE implique le concept de Nash.

De plus, la condition (5.1) montre immédiatement que si (x, x) est un équilibre strict tel que défini au problème 3.1 (donc, si u(x, x) > u(y, x) pour

³Notons que bien que la définition de stabilité évolutionnaire exige l'inégalité stricte, l'inégalité peut être faible pour le cas de $\varepsilon = 0$, cas limite de la définition.

tout $y \neq x$), x est nécessairement SPRALE. Mais si on sait seulement que u(x,x) = u(y,x) pour un certain y (donc si la meilleure réponse à x n'est pas unique), il faut aussi que, pour ce y, u(x,y) > u(y,y): évalué contre une meilleure réponse y à x, x doit être meilleur que y. Si cela n'était pas le cas, x pourrait être lentement envahi par y, car y serait au moins aussi bon que x dans toutes les rencontres possibles.

Nous avons démontré : Une stratégie x est SPRALE si et seulement si

- 1. $u(x,x) \ge u(y,x)$ pour tout y((x,x)) est un équilibre de Nash)
- 2. Si u(y,x) = u(x,x), alors u(x,y) > u(y,y) (x bat ses meilleures réponses).

5.2 Stabilité et sélection : La dynamique des reproducteurs

Dans cette partie nous reprenons le modèle d'un jeu symétrique joué lors de rencontres aléatoires bilatérales dans une grande population, mais nous introduisons une dimension explicitement dynamique. De l'autre côté nous sacrifions l'aspect de mutations, donc nous supposons que l'évolution des différentes stratégies est déterministe. Le jeu joué à chaque période lors des rencontres de deux membres de la population est donc $G = (\{1,2\}, X, u)$, où $X = X_1 = X_2$ et $u = u_1, u_1(x_1, x_2) = u_2(x_2, x_1)$. De plus, nous exigeons que le jeu soit fini et nous mettons $X = \{1, \dots, k\}$. Les "paiements" (adéquations Darwiniennes) u peuvent donc être représentés par une matrice, comme dans plusieurs exemples du cours jusqu'à présent. Appelons cette matrice U.

Soit $x_i(t)$ la part de la population du type i (jouant la stratégie pure i) à la période t. Evidemment, à chaque période nous avons $\sum_{i=1}^k x_i = 1$. Le vecteur x(t) qui décrit la distribution des k types dans la population,

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix}$$

est donc situé dans le "simplex unitaire", $S_k = \{x \in \mathbb{R}^k; x_i \geq 0, \sum_{i=1}^k x_i = 1\}$. Si $k \leq 3$, cet ensemble peut facilement être représenté graphiquement; il est une ligne pour k = 2, un triangle pour k = 3, un tétraèdre pour k = 4, etc. (voir Figure 5.1).

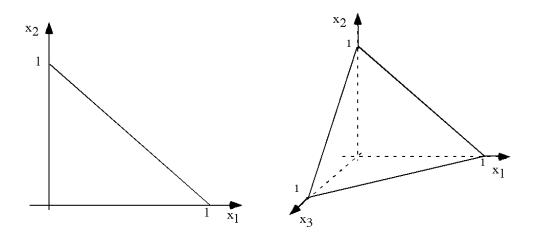


Fig. 5.1 – Les simplex unitaires en \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

En ce qui suit, nous dérivons l'évolution du vecteur x(t) à travers le temps, ou en termes géométriques, le mouvement de x(t) dans le simplex S_k . Pour cela, nous commençons par supposer que la population en question est large mais finie, et prendrons des limites plus tard. Soit donc p(t) le nombre d'individus à la période t, et $p_i(t)$ le nombre d'individus de type i. Par conséquent, $x_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}$.

Comme décrit ci-dessus, à chaque période t tout individu rencontre un autre individu de manière aléatoire, et joue avec ce dernier le jeu G. L'issue de cette interaction détermine le succès évolutionnaire des deux individus de la manière suivante. Après l'interaction chaque individu produit un certain nombre de descendants qui tous héritent du type du parent (nous adoptons donc de nouveau l'hypothèse simplificatrice que la reproduction est asexuelle). Après cet acte de reproduction l'individu de la période t meurt et une nouvelle période t+1 commence. Le nombre de descendants d'un individu de type i qui rencontre un individu du type j est de $\beta+u(i,j)$, où β est une constante non-négative qui représente l'adéquation Darwinienne de l'espèce en absence d'interactions (adéquation de base) et qui est telle que $\beta+u(i,j)\geq 0$ pour tout i,j. Si toutes les rencontres aléatoires sont équiprobables, l'espérance du nombre de descendants d'un individu de type i est égale à :

$$\beta + \sum_{i=1}^{k} x_j(t)u(i,j).$$

Si $p_i(t)$ est large, ce nombre est à peu près égal à la moyenne empirique des descendants des individus jouant la stratégie i. Dans ce cas, le nombre d'individus de type i à la période t+1 (qui est l'ensemble de tous les descendants d'individus de type i à la période t) est à peu près égal à

$$p_i(t+1) = \left(\beta + \sum_{j=1}^k x_j(t)u(i,j)\right)p_i(t)$$
 (5.2)

En fait, comme exprimé dans l'équation (5.2), nous supposons ici que cette approximation est exacte, pour éliminer complètement l'effet du hasard.

Pour ceux qui veulent en savoir un peu plus, l'argument est le suivant. Soit \widetilde{d}_j , $j=1,...,p_i(t)$, le nombre de descendants de l'individu j du type i. Les \widetilde{d}_j sont des variables aléatoires avec la même distribution et espérance mathématique

$$d_i = \beta + \sum_{i=1}^k x_j(t)u(i,j).$$

Par la loi des grands nombres nous savons que la moyenne empirique

$$\frac{1}{p_i(t)}(\widetilde{d}_1 + \dots + \widetilde{d}_{p_i(t)})$$

converge "presque partout" vers la moyenne d_i , donc qu'il est "très peu probable" que la moyenne empirique "diffère beaucoup de d_i ". Nous pouvons donc admettre que

$$p_i(t+1) = \widetilde{d}_1 + \dots + \widetilde{d}_{p_i(t)} \approx d_i p_i(t)$$

si $p_i(t)$ est grand.⁴

En prenant la somme sur i dans (5.2), nous obtenons :

⁴Même si on le réécrit de manière formelle, on peut constater que cet argument (qui est l'argument standard dans la théorie des jeux évolutionnaire) n'est pas complètement convaincant, car si $p_i(t)$ est grand, les deux côtés de la relation deviennent grands, et ils peuvent différer de façon considérable même si leur quotient converge. Mais ce problème est au-delà de la portée du présent cours.

$$p(t+1) = \sum_{i=1}^{k} p_i(t+1) = \beta p(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_j(t)u(i,j)p_i(t)$$

En divisant par et multipliant avec p(t) cela est équivalent à

$$p(t+1) = \beta p(t) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{p_i(t)}{p(t)} x_j(t) u(i,j) p(t)$$

$$= \left(\beta + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i(t) x_j(t) u(i,j)\right) p(t)$$
(5.3)

En divisant (5.2) par (5.3) nous obtenons la loi d'évolution des $x_i(t)$:

$$x_i(t+1) = \frac{\beta + \sum_{j=1}^k x_j(t)u(i,j)}{\beta + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k x_i(t)x_j(t)u(i,j)} x_i(t)$$
 (5.4)

Pour simplifier ces expressions, nous pouvons les exprimer sous forme de notation matricielle.

Rappel : Si A est une matrice $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$, le produit Ax est le vecteur en \mathbb{R}^m donné par $Ax = (\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j)_{i=1,\dots,m}$, et $y \cdot Ax = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij}x_ix_j$ est un nombre réel, le produit des deux vecteurs y et Ax du \mathbb{R}^m

En se rappelant du nom U de la matrice des u(i,j), cette notation nous permet d'écrire l'équation récurrente (5.4) tout simplement de la façon suivante :

$$x_i(t+1) = \frac{\beta + (Ux(t))_i}{\beta + x(t) \cdot Ux(t)} x_i(t)$$
(5.5)

pour i=1,...k. Cette équation décrit la version discrète de la "dynamique des reproducteurs", tel qu'introduite en biologie par Taylor and Jonker (1978).⁵ Elle exprime d'une façon simple l'idée que le destin de tout type i est donné par son adéquation moyenne relative à celle de l'adéquation moyenne de la population. Etant donné des conditions initiales x(0), les équations de motion (5.5) déterminent la répartition des différents types dans la population à chaque période t. En particulier, les conditions initiales, ensemble avec la

 $^{^5\}mathrm{Le}$ nom de la dynamique des reproducteurs a été introduit par Schuster et Sigmund (1983).

loi de motion, déterminent le comportement du système dynamique à long terme (pour $t \to \infty$). C'est ce comportement qui nous intéresse surtout dans ce qui suit. La question clé dans ce contexte sera bien naturellement le lien entre le comportement à long terme du système dynamique, d'une part, et les équilibres de Nash du jeu G, d'autre part. La population converge-t-elle vers un équilibre de Nash? Ou bien, converge-t-elle simplement? Si elle ne converge pas vers un équilibre, quelles sont les conclusions à en tirer par rapport au concept de l'équilibre de Nash? Si G a plusieurs équilibres de Nash, la dynamique des reproducteurs peut-elle nous aider à discriminer entre les équilibres? Ce sont les questions que nous allons nous poser.

Mais d'abord il convient de définir plus précisément les notions de "long terme" pour un système dynamique tel que (5.5). Plus généralement ce système a la forme

$$x(t+1) = F(x(t)), t = 0, 1, 2, ...$$
 (5.6)
 $x(0) = x_0 \text{ donné}$

où F est une fonction du simplexe S_k dans S_k . On dit que $\overline{x} \in S_k$ est un "état stationnaire" (où "point stationnaire") du système si $\overline{x} = F(\overline{x})$. Un tel point a la propriété que si, à un moment donné t, le système est arrivé à \overline{x} , il ne bouge plus : $x(t) = x(t+1) = \dots = \overline{x}$. En particulier, si le système commence à un point stationnaire, il reste à ce point, la dynamique est dégénérée.

Le deuxième concept important pour comprendre l'évolution à long terme d'un système dynamique concerne la question de savoir si le système, en effet, atteint un point stationnaire, ou tout au moins s'approche de lui de plus en plus. On dit qu'un point stationnaire est "asymptotiquement stable", s'il satisfait deux critères. Premièrement, si le système débute en un point initiale proche du point stationnaire, il doit rester proche de ce dernier, et deuxièmement, toute dynamique qui commence suffisamment proche du point stationnaire converge (finalement) vers celui-ci. Donc, au moins de manière "locale", le point stationnaire "attire" le mouvement de x(t). Nous complétons cette introduction aux termes fondamentaux de la théorie des systèmes dynamique par la notion de "stabilité globale" : un point stationnaire est dit globalement stable si le système (5.6) converge vers celui-ci

⁶Formellement, la première condition est que pour tout voisinage V du point stationnaire \overline{x} dans S_k il existe un autre voisinage $W \subset V$ de \overline{x} dans S_k tel que $x(t) \in W$ pour tout $t \geq t_0$, si $x(t_0) \in V$. La deuxième condition est qu'il existe un voisinage U de \overline{x} dans S_k tel que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x}$ si $x(0) \in U$.

pour toute condition initiale $x_0 \in S_k$.

Nous considérons maintenant deux exemples pour illustrer les concepts que nous avons introduits dans cette section.

Exemple 1 : Le dilemme du prisonnier

La matrice suivante, bien que numériquement différente de celle de la Section 2.1, représente le dilemme du prisonnier (rappelons que la matrice U prend la perspective du joueur 1)

$$U = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{array}\right).$$

Pour cette matrice d'adéquation Darwinienne, les équations de motion (5.4) prennent la forme suivante :

$$x_1(t+1) = \frac{\beta + 4x_1(t)}{\beta + 4x_1(t)^2 + 5x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2} x_1(t)$$

$$x_2(t+1) = \frac{\beta + 5x_1(t) + x_2(t)}{\beta + 4x_1(t)^2 + 5x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2} x_2(t)$$

Comment ce système évolue-t-il? On observe que

$$\operatorname{si} x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \operatorname{alors} x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{et} \operatorname{si} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \operatorname{alors} x(t+1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, les deux distributions extrêmes, qui consistent en des stratégies pures (chacun coopère et personne ne coopère), sont des points stationnaires. Pour étudier la dynamique du système plus amplement, il suffit d'étudier celle de $x_1(t)$, car $x_2(t) = 1 - x_1(t)$ pour tout t. En utilisant cette relation on peut simplifier le dénominateur de $x_1(t+1)$ pour obtenir

$$x(t+1) = \frac{\beta + 4x_1(t)}{\beta + 1 + 3x_1(t)} x_1(t). \tag{5.7}$$

Cette équation montre de nouveau que $x_1 = 1$ (coopération universelle) et $x_1 = 0$ (non-coopération universelle) sont des états stationnaires. Y-a-t-il

⁷Pour être plus précis : il faut avoir convergence pour toute suite qui commence à l'intérieur du simplexe (parce que on vérifie facilement que les points sur le bord du simplexe restent toujours sur le bord).

d'autres états stationnaires? La condition générale pour que \overline{x} soit un point stationnaire est $x_1(t+1) = x_1(t)$, ce qui est équivalent à

$$\frac{\beta + 4\overline{x}_1}{\beta + 1 + 3\overline{x}_1} \overline{x}_1 = \overline{x}_1. \tag{5.8}$$

Clairement, cette égalité n'a pas d'autres solutions que 0 et 1. Mais nous pouvons dire plus. Pour tout état non-stationnaire, $0 < x_1(t) < 1$, un examen de (5.7) montre que $x_1(t+1) < x_1(t)$. Donc, pour toute condition initiale la suite des $x_1(t)$ est strictement décroissante. Etant donné que $x_1(t) \ge 0$ pour tout t, la suite doit converger. A cette limite $x_1(t)$ et $x_1(t+1)$ sont égaux, donc nous retrouvons la condition (5.8).

Nous avons démontré que pour toute distribution $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de comportements initiales, le comportement de la population converge vers la non-coopération générale. Donc, la limite de la dynamique est totalement non-coopérative, donnée par la seule stratégie d'équilibre de Nash, i=1. En d'autres mots, les deux stratégies pures du jeu G sont des états stationnaires, mais l'issue Pareto-optimale n'est pas stable, cependant le comportement de l'équilibre de Nash l'est (en fait, il est globalement stable).

2. Feuille, caillou, ciseau:

La matrice suivante, normalisée pour n'avoir que des éléments non-négatifs (afin de permettre n'importe quel $\beta \geq 0$), représente le jeu de "Feuille, caillou, ciseau" :

$$U = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Pour ce jeu, les équations de motion (5.4) prennent la forme suivante :8

$$x_{1}(t+1) = \frac{\beta + x_{1} + 2x_{3}}{\beta + x_{1}^{2} + 2x_{1}x_{3} + 2x_{1}x_{2} + x_{2}^{2} + 2x_{2}x_{3} + x_{3}^{2}}x_{1}(t)$$

$$x_{2}(t+1) = \frac{\beta + x_{2} + 2x_{1}}{\beta + x_{1}^{2} + 2x_{1}x_{3} + 2x_{1}x_{2} + x_{2}^{2} + 2x_{2}x_{3} + x_{3}^{2}}x_{2}(t)$$

$$x_{3}(t+1) = \frac{\beta + x_{3} + 2x_{2}}{\beta + x_{1}^{2} + 2x_{1}x_{3} + 2x_{1}x_{2} + x_{2}^{2} + 2x_{2}x_{3} + x_{3}^{2}}x_{3}(t)$$

⁸Pour simplifier nous supprimons l'argument t dans les fractions

Comme à l'exemple deux-dimensionnel du dilemme du prisonnier, nous pouvons réduire ce système tri-dimensionnel à deux dimensions, en substituant $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. Le système réduit est donné par

$$x_1(t+1) = \frac{\beta + 2 - x_1 - 2x_2}{\beta + 1} x_1(t)$$
 (5.9)

$$x_2(t+1) = \frac{\beta + 2x_1 + x_2}{\beta + 1} x_2(t)$$
 (5.10)

avec $x_i(t) \geq 0$ et $x_1(t) + x_2(t) \leq 1$. Géométriquement il s'agit donc de trouver la trajectoire du vecteur $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ dans le triangle $T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ (voir Figure 2.4).

Le système (5.9)-(5.10) a-t-il des états stationnaires? Clairement, les trois distributions extrêmes données par $\overline{x}_1=0, \overline{x}_2=1$, par $\overline{x}_1=0, \overline{x}_2=0$, et par $\overline{x}_1=0, \overline{x}_2=1$ (les trois angles du triangle T), qui correspondent aux trois stratégies pures, sont stationnaires. Une inspection de (5.9)-(5.10) montre qu'ils sont les seuls points stationnaires avec soit $\overline{x}_1=0$, soit $\overline{x}_2=0$. En supposant que $\overline{x}_1\neq 0, \overline{x}_2\neq 0$, les autres points stationnaires de (5.9)-(5.10) sont donnés par

$$\frac{\beta+2}{\beta+1} - \frac{1}{\beta+1}\overline{x}_1 - \frac{2}{\beta+1}\overline{x}_2 = 1$$
$$\frac{\beta}{\beta+1} + \frac{2}{\beta+1}\overline{x}_1 + \frac{1}{\beta+1}\overline{x}_2 = 1$$

La solution unique de ce système de deux équations est $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \frac{1}{3}$. Le système a donc quatre états stationnaires : un pour chaque stratégie pure et un représentant l'unique équilibre mixte du jeu G.

Qu'en est-il de la convergence quand la population démarre avec une distribution initiale x_0 qui n'est pas stationnaire? La première observation est que, si le système démarre sur un des trois côtés de T, il reste sur ce côté et, en fait, converge vers un des coins. Si le système commence à l'intérieur de T, donc si toutes les stratégies du jeu G sont présentes dans la population, la question est un peu plus difficile. Une première réponse parvient, comme dans

⁹Pour vérifier cette observation il faut simplement poser soit $x_1 = 0$, soit $x_2 = 0$, soit $x_1 + x_2 = 1$ dans (5.9)-(5.10).

le cas de l'exemple précédent, par l'étude de la monotonicité du système :

$$x_1(t+1) - x_1(t) = (1 - x_1 - x_2) \frac{x_1}{\beta + 1} - \frac{x_1 x_2}{\beta + 1}$$
$$x_2(t+1) - x_2(t) = (1 - x_1 - x_2) \frac{x_2}{\beta + 1} + \frac{x_1 x_2}{\beta + 1}$$

Ceci montre que $x_1(t+1) > x_1(t)$ si et seulement si $x_2(t) < \frac{1}{2}(1-x_1(t))$, et que $x_2(t+1) > x_2(t)$ si et seulement si $x_2(t) > 1-2x_1(t)$. Comme le diagramme 5.2 (un "diagramme de phases" du système) le montre, nous obtenons donc une partition du triangle T dans quatre régions avec des comportements différents du système en termes de monotonicité.

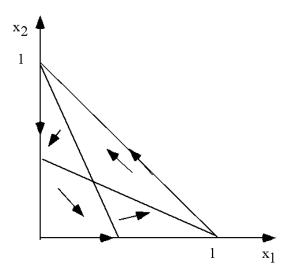


Fig. 5.2 – Un diagramme de phases

La Figure 5.2 montre aussi que la dynamique du système est caractérisée par une certaine cyclicité. Mais cette cyclicité correspond-elle à des cycles proprement dits, donc des trajectoires closes, ou plutôt à des mouvements cycliques qui soit explosent (vers le bord du triangle), soit convergent (peut-être vers l'équilibre de Nash au milieu)? Pour répondre à ces questions il faut plus de mathématiques que nous le supposons ici, et nous les laissons donc ouvertes. Le lecteur intéressé peut tout de même essayer de montrer (peut-être d'abord en programmant le système sur un ordinateur¹⁰) que le système

 $^{^{10}}$ Excel ou Mathematica sont des bons choix pour ce genre d'exercices.

(5.9)-(5.10) converge vers le bord du triangle. En particulier, l'équilibre de Nash n'est pas asymptotiquement stable.

Les deux exemples ci-dessus nous donnent quelques informations sur les questions générales que nous avons posées plus haut par rapport au comportement à long terme de la dynamique des reproducteurs, (5.5). Mais évidemment ils ne peuvent pas fournir des réponses générales. Dans le modèle générale, tel que décrit par les équations (5.5), les questions les plus importantes à discuter concernent d'abord les relations entre points stationnaires, stratégies d'équilibre de Nash et stratégies dominées, et ensuite la question de la stabilité des points stationnaires et, plus généralement, du comportement asymptotique du système. Comme nous ne pouvons pas développer la théorie générale dans ce cours, nous référons les lecteurs intéressés aux ouvrages spécialisés de Weibull (1995) ou de Hofbauer et Sigmund (1998).

Problèmes

95

Question 5.1:

5.3

1. Décrivez la dynamique des reproducteurs et déterminez leurs convergence pour le jeu de coordination symétrique à deux joueurs donné par

$$\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \end{array}\right), a \ge b$$

2. Déterminez les stratégies stables par rapport à l'évolution.

Question 5.2:

Dans notre discussion nous avons toujours supposé que les jeux en question étaient symétriques. Discutez cette hypothèse en étudiant le problème de formuler une dynamique des reproducteurs pour "Bach ou Stravinsky", donné par

	В		S	
В	3		1	
		2		1
S	0		2	
		0		3

Question 5.3:

Considérez le jeu symétrique à deux joueurs de "Feuille-Caillou-Ciseau généralisé"

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 0 \\ 0 & 1 & 2+a \\ 2+a & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \ge 0$$

- 1. Décrivez la dynamique des reproducteurs pour ce jeu. Exprimez-la par un système dynamique à 2 dimensions, c.-à-d. défini dans l'ensemble $T = \{ x \in \mathbb{R}^2_+; x_1 + x_2 \le 1 \}.$
- 2. Trouvez les états stationnaires du système et déterminez sa convergence pour des valeurs initiales sur le bord de T.
- 3. Montrez que pour toute valeur initiale non-stationnaire le système converge vers le bord de T.

Question 5.4:

Le jeu suivant à deux joueurs, appelé "faucon - colombe", est important en biologie (et a des applications intéressantes en économie). Face à une proie de valeur 1 tout joueur (qui est en fait un animal) peut se comporter comme un "faucon" (F) ou comme une "colombe" (C). Si les deux joueurs choisissent C, la proie est repartie également parmi les deux. Si un joueur choisit C et l'autre F, C obtient 0 et F obtient 1. Si tous les deux choisissent F, la valeur de la proie est repartie également et les deux opposants subissent des coûts de c>0 chacun.

- 1. Donnez la matrice de paiements du jeu.
- 2. Déterminez les stratégies stables par rapport à l'évolution. En particulier, est-il possible qu'une population composée exclusivement de faucons est stable? (La réponse à cette dernière question dépend de c)

Deuxième partie Jeux sous forme développée

Jusqu'à présent, nous avons étudié des jeux dans lesquels tout joueur n'intervient qu'une seule fois et toutes les actions se produisent simultanément. Comme nous l'avons discuté au chapitre 1, cela n'implique pas forcément que les interactions stratégiques considérées sont statiques (cf. l'exemple des échecs, modélisés dans le chapitre 1), même si la majorité des applications du concept de la forme normale que nous avons étudiées concernent, en fait, des interactions statiques. Il reste toutefois à constater que notre description des interactions dynamiques a été statique. En fait, nous avons modélisé le comportement d'un joueur dans une interaction dynamique par un plan complet, choisi au début de l'interaction et jamais révisé ensuite. Le concept d'un équilibre dans une telle situation est, par conséquence, celui d'un équilibre en plans.

A priori, une révision d'un plan complet dans un jeu dynamique ne paraît pas nécessaire, parce que les joueurs sont supposés rationnels, donc ils ne se trompent pas et prévoient tout. Comme nous l'avons discuté, cette hypothèse est certainement déraisonnable dans le contexte de jeux très complexes tels que les échecs, mais elle est acceptable dans des situations dont la structure dynamique est simple. Toutefois, il existe une raison plus subtile pour que la notion d'équilibre en plans complets ne soit pas satisfaisante. Cette raison est liée au problème de la crédibilité et des faits accomplis que nous étudions systématiquement dans cette partie du cours.

A cette fin, nous introduisons, dans le prochain chapitre, de manière explicite la notion du temps dans notre théorie des jeux. Il est clair que de nombreux problèmes économiques, et plus généralement stratégiques, sont de nature dynamique plutôt que statique. Mentionnons ici trois types d'interactions qui sont particulièrement importantes :

- Le schéma action-réaction-réaction-etc. Dans une telle situation, des actions des participants ne sont pas simultanées, mais se suivent, même à de courts intervalles, par exemple dans une négociation.
- Les décisions à long terme moyen terme court terme. Ce schéma décrit des interactions dans lesquelles les participants prennent des décisions, partiellement simultanées peut-être, de différents horizons temporels et différents degrés de flexibilité ou de réversibilité. Un exemple typique est la décision d'une entreprise de la construction d'une usine supplémentaire (décision à long terme et difficilement révocable), du design de la production dans cette usine (moyen terme, réversible, mais la révision de la décision est coûteuse) et de la politique de prix pour les nouveaux produits (court terme, réversible assez facilement).

– La répétition d'interactions statiques, correspondant au problème classique des "jeux répétés". Nous avons vu, par exemple, que le comportement optimal (soit en stratégies dominantes, soit à l'équilibre de Nash) dans le dilemme du prisonnier est la non-coopération, bien qu'il y ait une tendance naturelle chez beaucoup d'hommes à coopérer. La coopération émerge-t-elle si on laisse répéter le dilemme du prisonnier plusieurs fois?

Dans cette deuxième partie du cours, nous introduisons l'analyse dynamique par étapes de complexité croissante. D'abord nous considérons des situations où à chaque moment seulement un joueur intervient. Ceci correspond au schéma action-réaction-réaction et exclut des actions simultanées. Ensuite nous introduisons des actions simultanées, ce qui permet d'analyser les deux autres types d'interaction mentionnés ci-dessus.

Chapitre 6

Jeux à information parfaite

Un des grands thèmes de la théorie des jeux dynamiques est le problème de la crédibilité ou, plus précisément, des menaces ou promesses crédibles. Ce problème a une grande importance pratique qui n'est pas toujours bien comprise par les acteurs économiques et politiques. Nous commençons la discussion avec quelques exemples caractéristiques.

6.1 Quelques exemples

1. Entrée et dissuasion d'entrée dans un marché.

Considérons un marché limité et bien défini dans lequel certaines rentes peuvent être gagnées, par exemple celui des cinémas dans la région lausannoise, du marché mondial des trains à grande vitesse, où de l'alimentation générale dans une petite ville.

Supposons que le marché soit dominé par un monopoleur et qu'un concurrent potentiel souhaite entrer dans ce marché. Nous savons (et le monopoleur le sait aussi) que le profit de monopole est plus élevé que celui réalisé dans un duopole. Plus précisément, il est bien connu qu'en situation de concurrence, qui joue en faveur des consommateurs, la totalité des profits dans un duopole est plus petite que le profit de monopole. La question qui nous intéresse ici est la suivante :"Est-ce que le monopoleur, étant donné la valeur du monopole, peut dissuader le concurrent d'entrer?"

En principe, le monopoleur dispose de plusieurs moyens à cette fin, tels que la guerre des prix, les batailles publicitaires, l'introduction de services supplémentaires, etc. Toutes ces actions dissuadent l'entrant potentiel car elles rendent la perspective du duopole moins profitable, voir improfitable. Mais elles ont toutes aussi une autre caractéristique commune : tous ces moyens sont coûteux aussi pour le monopoleur.

En tant que jeu stratégique la situation peut être formulée de la façon suivante. Il y a deux joueurs, le monopoleur (M) et le concurrent (C). Le concurrent a deux actions possibles, soit "entrer dans le marché" (e), soit "rester dehors" (r). Si le concurrent choisit r, le jeu est terminé, si le concurrent entre, le monopoleur peut soit être "agressif" (a), soit "céder" (c).

Pour définir les paiements nous choisissons ici des valeurs numériques simples suivantes qui reflètent la structure générale discutée ci-dessus.

Profit de monopole : 5
Profit de duopole par entreprise : 2
Profit en guerre des prix : 0
Coût d'entrée pour C : 1

La représentation comme jeu sous forme normale de cette interaction est donnée par la matrice suivante :

	e	r
a	0	5
	-1	0
c	2	5
	1	0

Ce jeux admet deux équilibres, (c,e) et (a,r). Dans le premier équilibre, le monopoleur cède le marché ce qui fait entrer le concurrent. Dans le second, le monopoleur menace de déclencher une guerre des prix, ce qui empêche le concurrent d'entrer. Le problème stratégique dans cette situation est que les actions ne sont pas prises simultanément. En fait, le concurrent s'intéresse seulement au comportement du monopoleur après la décision d'entrer. Mais si le concurrent entre, le monopoleur doit choisir entre a (ce qui lui donne 0) et c (ce qui donne 2). Donc, il va choisir de céder.

Une fois le concurrent entré, le monopoleur a une incitation à oublier toutes ses menaces : la menace d'agressivité n'est pas crédible. Dans ce sens, l'équilibre (a, r) est moins convainquant que l'équilibre (c, e).

2. Les "zones de sécurité" en Bosnie.

Le deuxième exemple est pris de la politique et est à la fois plus important et plus brutal. Il concerne les "zones de sécurité" en Bosnie pendant la guerre en Bosnie-Herzegovine dans les années 1990.

Ces zones ont été désignées en 1993 comme zones musulmanes par l'ONU en annonçant des "conséquences graves" pour tout agresseur qui les attaquerait. Cependant, en juillet 1995, l'armée serbo-bosniaque conquiert une de ces zones, Srebrenica. L'ONU proteste, mais elle retire ses derniers soldats de la zone et ne riposte pas (sur le plan militaire), bien que l'armée serbo-bosniaque commette un massacre de la population musulmane.

Comment peut-on expliquer ce manque de réponse? L'ONU a-t-elle changé de stratégie entre 1993 et 1995? Evidemment, la situation est trop complexe pour qu'un "jeu stratégique" simple puisse l'analyser complètement. En particulier, il n'est pas évident que l'ONU ait été d'accord sur une stratégie claire (ce qui implique qu'une analyse stratégique de la situation devrait inclure les différents acteurs et leurs relations au sein de l'ONU). Mais un élément important dans l'explication du drame de Srebrenica est le fait que la riposte militaire aurait été très "coûteuse" (en termes financiers et humains), aussi pour l'ONU. Donc, la menace de "graves conséquences" n'était pas crédible, un fait qui a été vite compris par l'armée serbo-bosniaque. Dans cette perspective la question cynique qui se pose est plutôt pourquoi l'armée serbo-bosniaque a attendu si longtemps pour l'assaut final.

3. La négociation sur la répartition d'un "gâteau".

Considérons deux personnes qui doivent se mettre d'accord pour se partager un bien divisible (la division d'un héritage entre héritiers en l'absence de testament, une rente économique telle que le profit d'une entreprise entre salariés et propriétaires, etc.). Pour rendre cette situation plus concrète, on parle souvent de la division d'un "gâteau" d'une certaine taille.

Le problème principal est que chacun a intérêt à menacer de rejeter toute proposition qui ne lui est pas favorable. De plus, dans ce type de situation il n'est pas possible de rejeter trop de propositions, car il faut se mettre d'accord pour obtenir quelque chose.

On considère ici une version extrême de cette situation, obtenue en supposant que le joueur 1 a tout le pouvoir de négociation. Donc, il propose une répartition (x, 1-x), où $x \in [0,1]$ est le pourcentage du gâteau qu'il obtiendra. Ensuite, le joueur 2 peut soit accepter soit rejeter la proposition. S'il rejette, la négociation est terminée et le gâteau est perdu (pour les deux joueurs); s'il accepte, il obtient les 1-x pour cent proposés (en anglais, ce

genre de négociation est appelé "take-it-or-leave-it offer": TIOLIO).¹

Clairement, dans cette situation le joueur 2 a intérêt à rejeter toute proposition qui n'est pas "juste", "satisfaisante", "au-dessous de 60%", etc. Mais supposons que le joueur 1 ait fait une proposition de (0.9,0.1). Le joueur 2 a-t-il encore intérêt à rejeter cette proposition? La réponse logique à cette question, qui peut surprendre, est négative; en fait, toute proposition qui lui accorde plus que 0 est meilleure que l'arrêt de la négociation, qui lui donne 0. Donc toute proposition x < 1 doit être acceptée.

Pour analyser cette interaction de façon plus précise, demandons-nous d'abord quelles sont les "stratégies" dans ce jeu. Pour le joueur 1, ceci est simple : une stratégie consiste à proposer un nombre x entre 0 et 1. Si ce nombre est accepté, le joueur 1 obtient x, et le joueur 2 1-x pour cents du gâteau. Pour le joueur 2, les choses sont un peu plus compliquées. En fait, son choix ne se limite pas à simplement "accepter" (A) ou "rejeter" (R), ce qui serait un choix binaire. Si le choix était si simple, le jeu serait bien différent de la situation à étudier, car le joueur 2 ferait son choix sans connaître la proposition de l'autre joueur. Par conséquence, nous aurions décrit un jeu simultané au lieu du jeu séquentiel qui nous intéresse.

De façon plus correcte, dans cette situation, une stratégie du joueur 2 doit être vue comme une réponse à toute proposition possible du joueur 1, donc comme un "plan d'actions". Un tel plan peut être décrit par une fonction :

$$s:[0,1]\longrightarrow \{A,R\}$$
.

La fonction s définit le choix d'action (A ou R) pour toute proposition possible. Un exemple est la stratégie de rejeter toute proposition qui ne laisse pas au joueur 2 au moins 1/3 du gâteau :

$$s(x) = \begin{cases} A & \text{si } x \le 2/3 \\ R & \text{si } x > 2/3. \end{cases}$$

La meilleure réponse de la part du joueur 1 à ce plan est de choisir x = 2/3. Mais malheureusement ce plan utilise une menace non-crédible. En fait, si le

¹Evidemment, ceci est une description peu réaliste des négociations. Mais elle capte un élément important du problème des négociations, c.à.d. le phénomème du rejet des offres impose des coûts aux deux parties de la négociation. Un exemple pour une telle situation extrême a été la situation au proche-orient à la fin de l'année 2000 : si le tour de négociation entre Israëliens et Palestiniens en cours jusqu'au début janvier échouait, il était clair que le changement à la Maison Blanche à Washington et les élections en Israël rendraient un accord de paix dans l'avenir moyen impossible.

joueur 1 choisit, par exemple, x = 0.9, le joueur 2 a le choix entre 0.1 (obtenu en acceptant) et 0 (obtenu avec R). Il va donc accepter 0.9, en bouleversant ainsi son plan original.

En conséquence, pour qu'un plan soit crédible, il faut qu'il accepte tout x < 1. Tous les autres plans utilisent des menaces non-credibles, et le joueur 1 peut s'attendre à ce que le joueur 2 n'adhère pas à ces plans, une fois l'offre mise sur la table.

6.2 Des définitions plus générales

Les trois exemples que nous venons de discuter appartiennent à la classe des "jeux dynamiques à information parfaite". Ce sont des jeux dans lesquels les joueurs accomplissent des actions les uns après les autres, dans un ordre prédéterminé, en connaissant à tout instant les actions déjà choisies (c'est pour cela que l'information est "parfaite"). Dans cette interaction, les joueurs peuvent intervenir plusieurs fois.

Comme nous l'avons vu surtout dans le troisième exemple ci-dessus, les stratégies dans un jeu dynamique sont des plans d'actions (sauf celles du premier intervenant). Cette notion de stratégie est à la base de toute la théorie des jeux dynamiques.

Dans la suite, nous développons les outils théoriques pour discuter plus généralement la structure des trois exemples précédents. Un des outils les plus importants de la théorie des jeux en général est le concept de l'arbre du jeu. Ce concept est une généralisation du concept de l'arbre de décision de la théorie de la décision en recherche opérationnelle :

Définition : L'arbre de jeu d'un jeu dynamique à information parfaite consiste en plusieurs points (appelés "noeuds") reliés par des lignes, tels que

- un point particulier est appelé "l'origine de l'arbre"
- un et un seul chemin part de l'origine vers tout autre point
- les points où un chemin partant de l'origine s'arrête sont appelés les "noeuds terminaux"
- à tout noeud terminal, et seulement aux noeuds terminaux, est associé un vecteur de paiements pour les joueurs
- à tout autre noeud ("noeuds de décision") est associé le nom d'un joueur, indiquant qui doit intervenir à ce point.

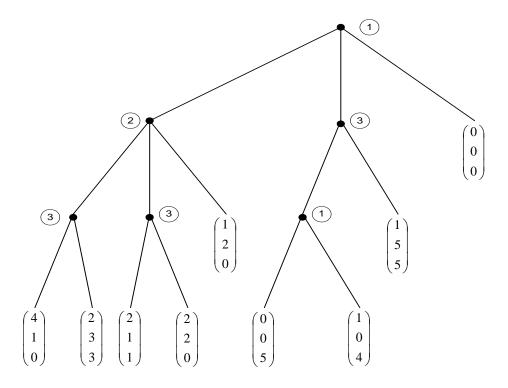


Fig. 6.1 – Un arbre de jeu

La figure 6.1 donne un exemple (complètement arbitraire) d'un arbre de jeu (ces arbres poussent normalement du haut vers le bas!). Plus concrètement, la figure 6.2 présente l'exemple du jeu d'entrée donné ci-dessus. Le lecteur/la lectrice vérifiera que toute l'information sur l'interaction décrite est contenue dans ce graphique.

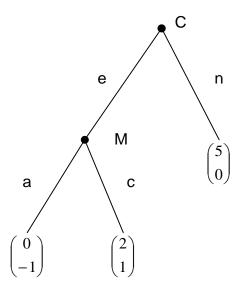


Fig. 6.2 – Le jeu d'entrée dans un marché

L'autre exemple numérique que nous avons discuté plus haut, celui de la négociation à l'ultimatum, est représentée à la figure 6.3, où nous supposons (contrairement aux partages possibles dans l'exemple) que le gâteau ne peut être divisé qu'en pièces de taille 1/10. L'ensemble de stratégies du joueur 1 est donc fini, comme à l'exemple de la figure 6.1.

Si on veut décrire des jeux comme celui de l'exemple 3 ci-dessus, où un joueur a un nombre infini d'actions à sa disposition, il faut une façon symbolique de décrire toutes les branches de l'arbre. La figure 6.4 en donne un exemple pour le cas de la négociation à l'ultimatum avec des répartitions arbitraires.

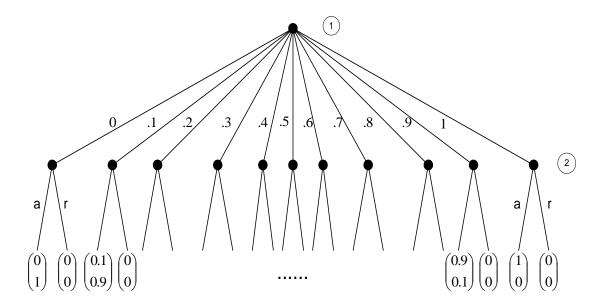


Fig. 6.3 – Le jeu d'ultimatum discret

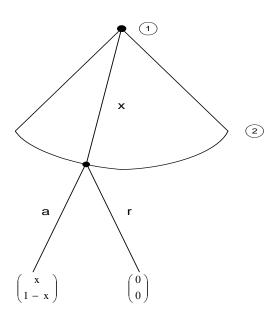


Fig. 6.4 – Le jeu d'ultimatum continu

Les exemples illustrent le fait qu'un arbre de jeu décrit complètement une

interaction stratégique, donc un jeu.

Définition : La forme développée d'un jeu à information parfaite est la donnée de son arbre de jeu.

Comme il est constaté plus haut, intuitivement une stratégie dans un tel jeu sous forme développée est un plan d'actions :

Définition : Une stratégie d'un joueur dans un jeu sous forme développée associe à tout noeud portant le nom du joueur une des actions qui sont possibles à ce noeud.

La donnée d'une stratégie pour chaque joueur détermine donc un chemin unique de l'origine vers un noeud terminal dans l'arbre de jeu. Ce chemin représente le déroulement de la partie du jeu. Parce qu'à tout noeud terminal de l'arbre de jeu est associé un paiement, nous avons retrouvé ainsi une forme normale : joueurs, stratégies, paiements. On l'appelle la forme normale du jeu dynamique. Donc, on peut transporter notre analyse des jeux sous forme normale du chapitre 2 dans les interactions dynamiques! En particulier, les notions de dominance et d'équilibre de Nash de la théorie statique s'appliquent sans autre aux jeux sous forme développée. Cette généralité d'analyse constitue un des atouts majeurs de la théorie des jeux.

Exemple : La négociation à l'ultimatum : Nous avons déjà vu la forme développée du jeu à la figure 6.4. La forme normale est donnée par les éléments suivants :

- stratégies de 1 : $x \in X_1 = [0, 1]$ - stratégies de 2 : $s \in X_2 = \{s : [0, 1] \rightarrow \{A, R\}\}$
- paiements:

$$u_1(x,s) = \begin{cases} x & \text{si } s(x) = A \\ 0 & \text{si } s(x) = R \end{cases} \quad u_2(x,s) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } s(x) = A \\ 0 & \text{si } s(x) = R \end{cases}$$

Notons que le concept d'équilibre de Nash est relativement faible dans ce modèle. En fait, toute répartition $\overline{x} \in [0,1]$ peut être réalisée à l'équilibre : il suffit de prendre

$$(x,s)$$
 tel que $x = \overline{x}$ et $s(x) = \begin{cases} A & \text{si } x \leq \overline{x} \\ R & \text{si } x > \overline{x} \end{cases}$

Mais nous avons vu que, si $\overline{x} < 1$, la stratégie s du joueur 2 est basée sur une menace non-crédible.

Comment la notion d'une menace non-crédible peut-elle être exprimée en utilisant la forme développée? Comme Selten (1965) l'a montré dans un article célèbre, cela se fait d'une manière très naturelle par le principe de la programmation dynamique (rationalité séquentielle). Ce principe est à la base d'une méthode de "résolution" des jeux sous forme développée, appelée la "récurrence à rebours" (backwards induction en anglais). Cette méthode est définie pour les jeux finis à information parfaite et consiste en répétant les deux étapes suivants :

- 1. On considère tous les noeuds de l'arbre du jeu qui ne conduisent qu'à des noeuds terminaux. A chacun de ces noeuds, le joueur qui a la main choisit la fin de partie qu'il préfère.
- 2. Etant donné le choix du joueur à un tel noeud, on remplace ses actions à ce noeud par le vecteur de paiements qui résulte de son choix. Le noeud devient donc un noeud terminal.

En répétant les étapes 1 et 2, l'arbre devient de plus en plus "court". Cette procédure s'arrête lorsqu'on arrive à l'origine de l'arbre de jeu.

Quand on est arrivé à l'origine de l'arbre, tout noeud de l'arbre est atteint par cette procédure. La récurrence à rebours définit donc une stratégie pour tout joueur. Cette stratégie n'est pas unique, car il se peut que le joueur soit indifférent entre plusieurs actions à un noeud donné. Dans ce cas il choisit une de ses actions préférées. Si les joueurs ne sont jamais indifférents entre leurs actions (comme par exemple dans l'arbre de la figure 6.1), la récurrence à rebours définit un ensemble de stratégies, donc une issue du jeu, unique.

Définition : Dans un jeu dynamique fini à information parfaite, un ensemble $(s_1, ..., s_n)$ de stratégies généré par récurrence à rebours est appelé équilibre parfait.

Proposition 6.1 : Tout équilibre parfait est un équilibre de Nash.

Démonstration : Considérons un équilibre parfait s et supposons qu'il y ait un joueur i et une stratégie $\hat{s}_i \neq s_i$ qui lui donne strictement plus que s_i . Sur le chemin d'équilibre dans l'arbre, il y a donc un noeud, disons n, pour lequel \hat{s}_i choisit une continuation strictement plus profitable que s_i , étant donné les choix des autres joueurs et les choix ultérieurs du joueur i prescrits par \hat{s}_i .

Prenons le dernier noeud, n_1 , sur ce chemin de continuation où le joueur i a la main. Par la définition de l'équilibre parfait l'action prescrite par s_i est optimale à n_1 , étant donné le comportement des autres joueurs. Donc l'utilité

du joueur i obtenu avec la stratégie s_i dans le sous-jeu qui commence à n_1 n'est pas inférieur à l'utilité avec la stratégie \hat{s}_i . A partir de n_1 , remontons sur le chemin donné par \hat{s}_i dans l'arbre jusqu'au prochain noeud où le joueur i a la main, n_2 . De nouveau, l'utilité du joueur i obtenu avec la stratégie s_i dans le sous-jeu qui commence à n_2 n'est pas inférieur à l'utilité avec la stratégie \hat{s}_i . Etc., un nombre fini de fois, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au noeud n. Contradiction.

La différence fondamentale entre équilibres de Nash et équilibres parfaits

est que les stratégies d'un équilibre parfait n'utilisent pas de menaces non crédibles. C'est à dire que bien que les stratégies d'équilibre de Nash soient optimales étant donné les stratégies des autres joueurs, elles ne sont pas forcément optimales face aux actions hors équilibre des autres. Bien entendu, si les autres joueurs respectent leurs choix de stratégies tout au long du jeu, des stratégies d'équilibre non parfait ne posent aucun problème : elles sont optimales face aux choix donnés des autres. Toutefois, la dimension temporelle des jeux sous forme développée suggère que les joueurs peuvent avoir une incitation à dévier, parce qu'il anticipent que les autres joueurs vont dévier de leurs stratégies eux aussi (donc que les autres joueurs n'exécutent pas leurs "menaces" ou "promesses"). Le critère de la "perfection" introduit ci-dessus exclut ce type de considération et élimine un certain nombre d'équilibres de Nash.

Exemple : La négociation à l'ultimatum : Le seul équilibre parfait de ce jeu (cf. fig. 6.4) est x = 1 et s(x) = A pour tout x.

Il y a une autre façon de définir le concept de l'équilibre parfait; celle-ci est plus générale et elle nous sera utile dans la discussion du marchandage au chapitre 7 et des jeux dynamiques à information imparfaite (chapitre 8). Cette nouvelle définition provient de l'observation qu'un optimum dans un problème de décision individuel peut être considéré comme un équilibre de Nash d'un jeu à un joueur. Donc la dernière étape dans la procédure de la récurrence à rebours n'est rien d'autre que la condition que le comportement dans les noeuds pénultièmes du jeu est un équilibre de Nash pour tous ces noeuds. En remontant par un noeud dans l'arbre, disons au noeud n, le comportement du joueur qui a la main à ce noeud doit être optimal étant donné les choix des joueurs à tous les noeuds pénultièmes qui suivent n. Comme les choix des joueurs au noeuds pénultièmes sont des réponses optimales aux

actions précédentes, on voit que la récurrence à rebours demande que le comportement dans le jeux qui commence à n est en fait un équilibre de Nash dans ce jeux. Et ainsi de suite. Cette réflexion nous mène à définir le concept d'un sous-jeu :

Définition : On appelle sous-jeu d'un jeu sous forme développée à information parfaite tout arbre de jeu obtenu en prenant comme origine un noeud non terminal de l'arbre initial.

La nouvelle définition de l'équilibre parfait peut donc être exprimée de la façon suivante :

Définition : Soit un jeu sous forme développée à information parfaite à n joueurs. Un équilibre parfait (ou "équilibre parfait sur les sous-jeux") est un ensemble de stratégies $s_1, ..., s_n$ qui génère un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu. Plus précisément : $(s_1, ..., s_n)$ est parfait s'il a la propriété suivante : pour tout sous-jeu les restrictions de $s_1, ..., s_n$ à ce sous-jeu forment un équilibre de Nash du sous-jeu.

D'après notre discussion ci-dessus il devrait être clair que cette définition et la définition précédente de l'équilibre parfait sont identiques si le jeu est fini et à information parfaite. Le grand avantage de cette dernière définition est qu'elle peut être appliquée plus généralement que la première. Prenons pour exemple le cas des jeux infinis à information parfaite. Un jeu infini est un jeux dont l'arbre de jeu contient au moins un chemin partant de l'origine qui n'a pas de fin. Au prochain chapitre nous verrons un exemple classique d'un tel jeu : une négociation qui se termine quand les participants se mettent d'accord, mais qui n'a pas de date terminale fixe. Donc si les participants ne se mettent jamais d'accord, la négociation dure infiniment.

Dans un tel jeu infini la récurrence à rebours n'a pas de sens, parce qu'elle n'atteint pas les noeuds sur un chemin infini. Cependant, la deuxième définition de l'équilibre parfait est tout à fait applicable. Donc si nous parlerons des équilibres parfaits, nous nous référerons toujours à la deuxième définition, en sachant que dans le cas des jeux finis à information parfaite la récurrence à rebours fournit un moyen simple pour calculer ces équilibres.

6.3 Problèmes

Question 6.1:

Le jeu de Nim est un jeu de société simple pour deux joueurs : On regroupe un nombre d'allumettes dans plusieurs tas différents; les deux joueurs doivent alternativement choisir un, et un seul, tas et en enlever au moins une allumette; le dernier joueur à enlever une allumette gagne.

- 1. Dressez l'arbre de jeu pour un jeu de Nim avec 2 tas dont l'un contient 1 allumette et l'autre 3 allumettes. Y-a-t-il des stratégies gagnantes dans ce jeu?
- 2. Faites de même pour un jeu avec 3 tas dont l'un contient une, un autre deux et le dernier 3 allumettes.
- 3. Considérez un jeu de Nim arbitraire. Montrez qu'il y a toujours un joueur qui a une stratégie gagnante (une stratégie qui permet de gagner contre toute défense).
- 4. Caractérisez les positions dans lesquelles le joueur dont c'est le tour de jouer gagnera sûrement.

(Pour plus d'information sur le jeu de Nim et des jeux similaires voir l'ouvrage (génial et amusant) de E. Berlekamp, J. Conway et R. Guy, Winning Ways (2 tomes), Academic Press, London 1982. La théorie mathématique de Nim a été développée par C.L. Boutin, Nim, a game with a complete mathematical theory, Annals of Mathematics, Princeton 1902.)

Question 6.2:

Considérez le jeu suivant entre deux joueurs. Les joueurs décident alternativement de continuer ("C") ou de terminer ("T") le jeu. Si le jeu n'a pas été terminé par un des joueurs après 999 tours, il est terminé automatiquement. A chaque tour, les joueurs connaissent toutes les décisions précédentes. L'arbre de jeu est donné à la figure 6.5.



113

Fig. 6.5 – Le mille-pattes

Déterminez les équilibres et les équilibres parfaits de ce jeu (appelé le "mille-pattes de Rosenthal").

Question 6.3:

On considère une entreprise qui a une position à terme à remplir, et plusieurs chômeurs qui veulent travailler et qui ont tous la même qualification pour le poste. Une fois embauché, l'employé peut travailler avec plus ou moins d'effort, ce qui influence la valeur de son travail pour l'entreprise. Plus précisément, on suppose que l'effort de l'employé peut être mesuré par un nombre ("index d'intensité") $e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, où e = 1 dénote l'effort minimal ("rester réveillé") et e = 5 l'effort maximal ("travailler comme un fou"). La valeur du travail pour l'entreprise dépend de e et est égal à

$$\Pi = 10e - w$$

où w est le salaire de l'employé. L'employé, en revanche, n'aime pas l'effort. On suppose que son aversion pour l'effort peut être quantifiée par une fonction c(e) croissante ("index d'aversion"), donnée par

$$c(e) = 5(e-1)^2$$
.

La valeur d'être employé au salaire w pour lui donc est égal à

$$u = w - c(e),$$

où e est le niveau d'effort montré. Si le chômeur ne travaille pas pour l'entreprise, il obtient des indemnités de chômage auxquelles il attribue la valeur u=1.

On considère l'interaction suivante entre l'entreprise et les employés potentiels. D'abord, l'entreprise fait une offre (w, \overline{e}) , où w est le salaire offert et \overline{e} est l'effort demandé. Ensuite, les intéressés potentiels décident s'ils veulent accepter l'offre où non. S'il y a plusieurs candidats, l'entreprise en choisit un. Après cela, le nouvel employé choisit son effort et les paiements donnés ci-dessus sont réalisés. Tout cela est connu des participants.

- 1. Supposez que le niveau e d'effort de l'employé peut être vérifié par l'entreprise et que, par conséquent, l'employé est forcé de fournir le niveau \overline{e} . Dans le cas où il y a un seul chercheur de travail, dessinez l'arbre de ce jeu. Déterminez les équilibres de Nash et les équilibres parfaits du jeu.
- 2. Supposez maintenant que l'effort de l'employé ne peut pas être vérifié par l'entreprise (c.à.d. l'entreprise ne peut rien faire si l'employé choisit un $e \neq \overline{e}$). Dans le cas où il y a un seul chercheur de travail, dessinez l'arbre de ce jeu. Déterminez les équilibres de Nash et les équilibres parfaits du jeu.
- 3. Continuez à supposer que l'effort de l'employé ne peut pas être vérifié par l'entreprise, mais supposez en plus que l'entreprise peut rémunérer ou punir l'employé après que celui-ci ait fourni son effort. Cette rémunération/punition vaut 5p à l'employé, où $p \in [-1,1]$ (il s'agit donc d'une punition si p < 0 et d'une rémunération si p > 0), et coûte $5p^2$ à l'entreprise (donc la punition et la rémunération sont coûteuses pour l'entreprise). Les paiements des deux joueurs sont donc

$$\Pi = 10e - w - 5p^2$$

$$u = w - c(e) + 5p.$$

Dans le cas où il y a un seul chercheur de travail, dessinez l'arbre de ce jeu. Déterminez les équilibres de Nash et les équilibres parfaits du jeu. En particulier, est-ce que la possibilité de rémunérer ou de punir rend l'issue prédite par l'équilibre parfait plus efficace? Discutez la plausibilité de cette prédiction.

Question 6.4:

Une chaîne de supermarchés avec des succursales dans chacun des T villages de la région a le monopole dans tous ces villages. Dans chaque village il y a un concurrent potentiel qui souhaite entrer dans le marché du village. Si,

6.3. PROBLÈMES 115

dans un village, le concurrent entre, la chaîne peut, soit réagir agressivement ("guerre des prix"), soit céder ("duopole paisible"). La valeur que la chaîne de supermarchés attribue au monopole dans un village k, k = 1, ..., T, est égale à 5. Si un concurrent est entré dans le marché d'un village, une guerre des prix donne des profits de 0, et un duopole paisible des profits de 2 aux deux participants. Le coût d'entrée est de 1 par village. Les décisions d'entrée et de réaction sont prises successivement dans un village après l'autre. Donc, d'abord le concurrent potentiel du village k = 1 décide d'entrer ou non, puis la chaîne réagit, ensuite le concurrent potentiel du village k = 2 décide d'entrer ou non, etc. A chaque étape toutes les décisions prises antérieurement, ainsi que les données du jeu, sont connues.

- 1. Dessinez l'arbre de jeu pour T=3. Commentaire?
- 2. Déterminez les équilibres de Nash de ce jeu.
- 3. Déterminez les équilibres parfaits de ce jeu.
- 4. Comparez les équilibres parfaits pour T=2 et T=20. Qu'en pensezvous?

Chapitre 7

Application: Le marchandage

Nous revenons ici à la question du partage d'un "gâteau" que nous avons commencé à aborder au chapitre précédent. Nous cherchons donc à déterminer la répartition du surplus provenant d'une interaction bilatérale, ceci étant un problème classique en économie. A titre d'exemple, ce surplus peut être le profit d'une entreprise avec pouvoir de marché (dont les profits ne sont donc pas éliminés par la concurrence), et le problème est de repartir ce profit entre les propriétaires et les employés de l'entreprise. Plus généralement, le surplus peut être le profit des entreprises d'une branche ou de toute l'économie, avec syndicats et l'association des employeurs comme intéressés. Mais une multitude d'autres situations rentrent dans le cadre considéré ici, tel quel la détermination du prix dans un échange bilatéral (p.ex., la vente d'une voiture entre deux personnes ou d'un avion de combat par un producteur d'avions à un gouvernement), ou la répartition d'un héritage entre héritiers.

La réponse classique des économistes (jusqu'en 1982) à cette question a été maigre : comme il n'y a pas de marché pour déterminer les valeurs en question, le résultat était indéterminé. Dans une telle situation d'un monopole bilatéral, tout était possible. Cette perspective changea en 1982 avec la parution d'un article fondateur de A. Rubinstein, qui soutenait que la répartition d'un surplus doit être modélisée explicitement comme un marchandage, et qui montrait qu'un tel marchandage peut être interprété et analysé comme un jeu dynamique. Le modèle de marchandage proposé par Rubinstein reconnaît la structure dynamique principale du marchandage qui est l'alternance d'offres et de contre-offres, et son concept de solution du jeu dynamique correspondant est celui de l'équilibre parfait. Ici, nous étudions

7.1. LE JEU FINI 117

une version simplifiée du jeu de Rubinstein.

7.1 Le jeu fini

En fait, nous avons déjà considéré un jeu de marchandage "dégénéré": la négociation à l'ultimatum du chapitre précédent. La contestation principale face à cette modélisation est justifiée par le fait que dans la réalité peu de situations de négociation ont une structure aussi simple et surtout une échéance aussi brusque. Normalement, les négociations continuent lorsqu'une offre ait été rejetée, et après le rejet d'une contre-offre tout n'est pas terminé non plus. Donc il y a une structure d'offres et de contre-offres alternantes potentielles qui peut entraîner des négociations longues, mais qui toutefois produit souvent des accords relativement vite dans les faits. Entre autre, Rubinstein (1982) donnait une réponse à ce paradoxe apparent : pourquoi les négociations se terminent souvent relativement vite bien que la suite des offres et contre-offres pourrait continuer très longtemps.

Pour commencer notre analyse, considérons donc une situation encore tout à fait simple, mais un peu moins extrême que celle de la négociation à l'ultimatum. Nous considérons à nouveau la répartition d'un "gâteau" de taille 1 entre deux individus, mais nous supposons que la négociation ne se termine pas immédiatement après le refus de la première offre. Plus précisément, au début de la négociation

- le joueur 1 propose une répartition $(x, 1-x), 0 \le x \le 1$
- ensuite soit le joueur 2 accepte (a dans ce cas 1 reçoit x, 2 reçoit 1-x, et la négociation est terminée), soit 2 refuse (r) l'offre.

Si le joueur 2 a refusé l'offre du joueur 1, la négociation continue de cette manière :

- 2 propose une répartition $(1-y,y), 0 \le y \le 1$
- soit 1 accepte (dans ce cas 1 reçoit 1 y, 2 reçoit y, et la négociation est terminée), soit 1 refuse l'offre (alors la négociation est terminée et les deux joueurs obtiennent 0).

Ces règles sont connues par les deux joueurs.

L'équilibre parfait de ce jeu peut être trouvé en utilisant nos résultats sur la négociation à l'ultimatum. En fait, nous savons de cette discussion que, si le deuxième tour de négociation est atteint, il faut que l'offre soit 1 et le joueur 1 l'accepte à l'équilibre. Donc lorsqu'il doit jouer au premier tour (répondre à la proposition x du joueur 1), le joueur 2 sait qu'il va

certainement obtenir 1 au deuxième tour, s'il refuse maintenant. Il refusera donc toute offre x>0, et il est indifférent quand l'offre est x=0. Quelque soit le choix au premier tour, le joueur 2 obtient donc 1 à l'équilibre parfait. Mais cet équilibre n'est pas unique, car le joueur 2 peut obtenir tout soit au premier tour, soit au deuxième tour. Formellement, si on dénote par $((x^*, s_1^*,), (y^*, s_2^*))$ les stratégies d'un équilibre parfait, nous savons que

$$s_1^*(y^*) = a$$
$$y^* = 1.$$

Mais à la première étape on peut avoir, soit $s_2^*(x) = r$ pour tout $x \in [0, 1]$ et x^* arbitraire, soit

$$s_2(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ r & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
$$x^* = 0$$

Avec le premier type d'équilibre, le joueur 2 obtient le gâteau au deuxième tour, tandis qu'avec le deuxième type d'équilibre il reçoit le gâteau au premier tour de la négociation. Cette différence importe peu. Le résultat important, c'est-à-dire les paiements des deux joueurs, est déterminé de façon unique à l'équilibre parfait.¹

Dans ce jeu de négociation à deux étapes, il y a donc un "last mover advantage" très fort : sachant que le joueur 2 obtient tout à la deuxième étape, le joueur 1 n'a pas d'alternative que de lui accorder tout. Cependant, ce résultat semble ignorer au moins un avantage pour celui qui fait la première proposition dans un marchandage : il peut faire arriver le processus à une fin plus ou moins rapidement. Dans le modèle discuté ci-dessus cet aspect n'existe pas, parce que les joueurs sont indifférents par rapport à la date de l'accord dans le cas où il survient.

Cette observation montre que nous avons omis un élément important dans notre modèle de marchandage : le temps, ou plutôt le coût en termes de temps perdu dans des négociations à longue durée.

Afin d'inclure cet aspect dans notre analyse, supposons que

 $^{^1}$ Nous avons glissé ici sur une autre indétermination de l'équilibre (peu importante). En fait, la stratégie d'équilibre du joueur 1 au deuxième tour n'est pas déterminée, car il peut accepter ou refuser les offres y < 1 sans que cela ait une conséquence : le joueur 2 va toujours proposer y = 1 et cette proposition est acceptée. Dans ce qui suit normalement nous ignorons cette indétermination.

7.1. LE JEU FINI 119

- chaque étape a une durée fixe ("une période")
- les joueurs actualisent leurs gains avec un facteur d'actualisation δ_1 pour le joueur 1 et δ_2 pour le joueur 2 (0 < δ_i < 1).

La durée de la période (par exemple un jour) et les coûts du temps δ_i sont exogènes et connus par les joueurs. Le coût de temps δ_i peut représenter des coûts non-monétaires et monétaires (tels que la valeur des opportunités perdues en attendant). Une mesure purement monétaire de tels coûts peut être le taux d'intérêt r_i (par période) qui permet au joueur i d'emprunter sur le marché financier afin d'avancer dans le temps la consommation ou l'investissement retardé. Dans ce cas on aura $\delta_i = 1/(1+r_i)$.

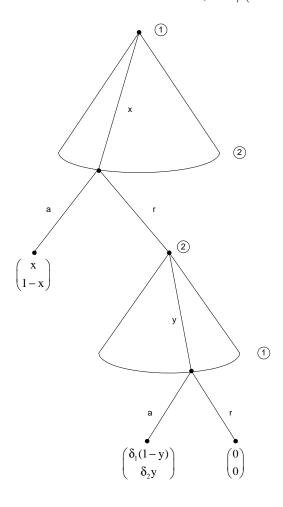


Fig. 7.1 – Le marchandage à 2 étapes

L'arbre de jeu de ce marchandage est illustré à la Figure 7.1. Cette description suppose que les joueurs s'intéressent uniquement aux gains monétaires individuels et ont une évaluation linéaire de ces gains. Quels sont les équilibres parfaits de ce jeux?

Comme il a été discuté auparavant, les paiements à la deuxième étape (si elle est atteinte) sont de 0 pour le joueur 1 et de 1 pour le joueur 2. A la première étape, le joueur 1 sait donc que le joueur 2 va refuser toute proposition qui lui donne moins que δ_2 . Comme le joueur 1 a intérêt à offrir quelque chose d'acceptable (autrement il obtiendra 0), il va offrir au moins δ_2 à l'autre. En plus, il sait que toute offre $x < 1 - \delta_2$ sera acceptée au premier tour. Cela montre qu'à l'équilibre le joueur 2 ne peut pas refuser une offre de $1 - \delta_2$ avec probabilité positive, car autrement le joueur 1 n'aurait pas de meilleure réponse. Par récurrence à rebours, on a donc :

$$\begin{vmatrix} x^* = 1 - \delta_2 \\ s_1^*(1) = a \end{vmatrix} s_2^*(x) = \begin{cases} x^* & \text{if } x \le 1 - \delta_2 \\ x^* & \text{if } x > 1 - \delta_2 \end{cases}$$

L'issue du jeu est donc la suivante :

- les joueurs se mettent d'accord à la première étape
- les paiements sont $(1 \delta_2, \delta_2)$

Notons qu'il reste un "last mover advantage" fort, mais que le joueur 1 a maintenant un certain avantage lui aussi ("first mover advantage") : étant donné que l'autre est impatient, le joueur 1 peut s'approprier "la valeur de l'impatience" de l'autre en gardant la partie correspondante du gâteau (δ_2) pour soi-même.

Mais pourquoi se contenter d'une négociation de deux étapes seulement? Considérons maintenant l'extension du marchandage à trois étapes. Pour faciliter la description et l'analyse, supposons que dans ce marchandage à trois étapes le joueur 2 fasse la première proposition, une offre de répartition (1-w,w), et que le joueur 1 réponde à cette offre. Si l'offre est acceptée, la répartition proposée est réalisée, si l'offre est refusée le joueur 1 fait une contre-proposition (x,1-x) et le jeu de marchandage de la figure 7.1 commence. Le jeu à trois étapes est illustré à la figure 7.2.

D'après ce que nous venons de montrer pour le jeu à deux étapes, pour déterminer les équilibres parfaits nous pouvons remplacer l'arbre du jeu à trois étapes par l'arbre simplifié donné à la figure 7.3. Cet arbre simplifié intègre le déroulement de la négociation à deux étapes après un refus du joueur 1 à la première étape dans l'analyse à trois étapes.

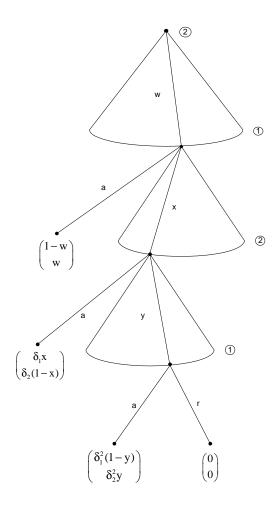


Fig. 7.2 – Le marchandage à 3 étapes

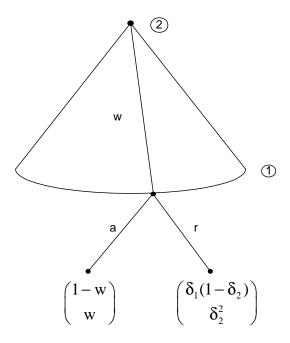


Fig. 7.3 – Le jeu réduit à 3 étapes

Donc le joueur 2 sait, au début de la première étape, que toute proposition qui laisse au joueur 1 moins que $\delta_1(1-\delta_2)$ sera rejetée, et celles avec $1-w>\delta_1(1-\delta_2)$ seront acceptées. Les propositions du joueur 2 lui donnent donc les paiements suivants :

$$w \leq 1 - \delta_1(1 - \delta_2) \Rightarrow w$$

 $w > 1 - \delta_1(1 - \delta_2) \Rightarrow (\delta_2)^2$

Ici nous avons reconnu, comme dans les jeux à une ou deux étapes, qu'à l'équilibre parfait, une réponse en cas d'indifférence doit être positive. Donc le joueur 2 choisit entre $1-\delta_1(1-\delta_2)$ (ce qu'il obtient en cas d'accord immédiat) et $(\delta_2)^2$ (ce qu'il obtient en cas d'accord retardé). Intuitivement, le premier de ces deux montants est plus grand parce qu'on ne subi pas les coûts d'attente. Formellement cela se vérifie aisément :

$$1 - \delta_1(1 - \delta_2) > 1 - (1 - \delta_2) = \delta_2 > (\delta_2)^2.$$

Donc à l'équilibre parfait du jeu à trois étapes,

7.1. LE JEU FINI 123

- les joueurs se mettent d'accord à la première étape.
- les paiements sont $(\delta_1(1-\delta_2), 1-\delta_1(1-\delta_2))$.

Le principe de ce raisonnement est simple : Si l'on a le droit de proposer, on donne à l'autre ce qu'il obtiendrait s'il proposait à l'étape suivante, actualisé par son facteur d'actualisation, et on garde le reste pour soi-même. En utilisant ce raisonnement général, nous pouvons dériver les répartitions à l'équilibre parfait des négociations plus longues. Pour simplifier l'exposé nous continuons à supposer que le joueur 2 fait la dernière proposition. Le tableau suivant donne les paiements des deux joueurs à l'équilibre parfait dans ces jeux.

joueur 1 joueur 2
$$3 \text{ étapes (2 commence)} \quad \delta_1(1-\delta_2) \qquad 1-\delta_1(1-\delta_2) \\ 4 \text{ étapes (1 commence)} \qquad \qquad \delta_2(1-\delta_1(1-\delta_2)) \\ 1-\delta_2+\delta_1\delta_2-\delta_1(\delta_2)^2 \\ 5 \text{ étapes (2 commence)} \quad \delta_1(1-\delta_2+\delta_1\delta_2-\delta_1(\delta_2)^2) \\ \qquad \qquad 1-\delta_1+\delta_1\delta_2-(\delta_1)^2\delta_2+(\delta_1)^2(\delta_2)^2$$

Etant donné ces formules, on peut deviner les formules pour le cas général du jeu à un nombre arbitraire d'étapes. En fait, dans le jeu à 2n $(n \ge 1)$ étapes dans lequel le joueur 1 commence, le paiement du joueur 1 semble être

$$P_1^{2n} = 1 - \delta_2 + \delta_1 \delta_2 \mp \ldots + (\delta_1 \delta_2)^{n-1} - \delta_1^{n-1} \delta_2^n \tag{7.1}$$

et celui du joueur 2

$$P_2^{2n} = 1 - P_1^{2n}$$

$$= \delta_2 - \delta_1 \delta_2 \pm \dots - (\delta_1 \delta_2)^{n-1} + \delta_1^{n-1} \delta_2^n$$
(7.2)

Si ces deux formules sont correctes, nous pouvons en déduire les formules pour le cas 2n+1 (où le joueur 2 commence) d'après le raisonnement que nous avons effectué auparavant :

$$P_1^{2n+1} = \delta_1 - \delta_1 \delta_2 \pm \ldots + \delta_1^n \delta_2^{n-1} - (\delta_1 \delta_2)^n$$

$$P_2^{2n+1} = 1 - P_1^{2n+1}$$

$$= 1 - \delta_1 + \delta_1 \delta_2 \mp \ldots - \delta_1^n \delta_2^{n-1} + (\delta_1 \delta_2)^n$$
(7.3)

Etant donné que ces formules sont correctes pour le cas n=1, le seul trou dans notre argument est maintenant le fait que nous avons seulement deviné

la formule pour 2n. Par récurrence mathématique, le trou peut être comblé, si nous pouvons déduire les expressions pour 2n des expressions pour 2n-1. En fait, en utilisant notre raisonnement ci-dessus pour déduire les paiements P_i^{2n+2} de P_i^{2n+2} , nous obtenons

$$P_1^{2n+2} = 1 - \delta_2 + \delta_1 \delta_2 \mp \dots + (\delta_1 \delta_2)^n - \delta_1^n \delta_2^{n+1}$$

$$P_2^{2n+2} = \delta_2 - \delta_1 \delta_2 \pm \dots - (\delta_1 \delta_2)^n + \delta_1^n \delta_2^{n+1}$$

Ces expressions on exactement la même forme que (7.1) et (7.2), si on note que 2n+2=2(n+1). Nous avons donc démontré que les paiements des deux joueurs dans la négociation à k étapes dans laquelle le joueur 2 fait la dernière offre sont P_i^k , tel que donné en (7.1) - (7.4). Avec le même argument, seulement en échangeant les indices i = 1, 2, on obtient les paiements pour le cas où le joueur 1 fait la dernière offre.

Bien qu'elles aient une apparence terrifiante, les expressions (7.1) - (7.4) sont en fait relativement bénignes, car elles se simplifient avec un peu de réflexion (c.-à-d. mathématique). Nous pouvons le montrer pour le cas du jeu à 2n étapes où 2 fait la dernière proposition (les autres cas sont analogues). En posant $d = \delta_1 \delta_2$ nous obtenons

$$P_2^{2n} = \delta_2 - d + \delta_2 d - d^2 \pm \dots - d^{n-1} + \delta_2 d^{n-1}$$

$$= \delta_2 (1 + d + \dots + d^{n-1}) - d - d^2 - \dots - d^{n-1}$$

$$= 1 - (1 - \delta_2)(1 + d + \dots + d^{n-1})$$

$$= 1 - (1 - \delta_2) \frac{1 - d^n}{1 - d}$$

où la dernière égalité utilise la formule pour l'addition des termes de la série géométrique finie. Le paiement du joueur 1 dans ce jeu est donc :

$$P_1^{2n} = (1 - \delta_2) \frac{1 - d^n}{1 - d}$$

Nous avons donc trouvé le résultat suivant :

Résultat 1 : A l'équilibre parfait du jeu de marchandage à 2n étapes où le joueur 1 fait la première proposition,

- les joueurs se mettent d'accord à la première étape, le joueur 1 propose la répartition $((1-\delta_2)\frac{1-(\delta_1\delta_2)^n}{1-\delta_1\delta_2}, 1-(1-\delta_2)\frac{1-(\delta_1\delta_2)^n}{1-\delta_1\delta_2})$ et le joueur 2 accepte.

7.1. LE JEU FINI 125

De façon analogue, on obtient:

Résultat 2 : A l'équilibre parfait du jeu de marchandage à 2n+1 étapes où le joueur 2 fait la première proposition,

- les joueurs se mettent d'accord à la première étape, le joueur 2 propose la répartition $(\delta_1(1-\delta_2)\frac{1-(\delta_1\delta_2)^n}{1-\delta_1\delta_2},\frac{1-\delta_1+\delta_1(1-\delta_2)(\delta_1\delta_2)^n}{1-\delta_1\delta_2})$ et le joueur 1 accepte.

Les formules pour les deux cas non traitées (où le joueur 1 fait la dernière proposition) sont évidemment facilement obtenues en échangeant les index des joueurs. Ces formules sont moins longues que les formules précédentes, mais elles ne sont pas encore très transparentes. Toutefois, on les comprend mieux si on note que le terme $(\delta_1\delta_2)^n$ devient insignifiant si n devient grand. En effet, comme il est bien connu de la finance élémentaire, déjà pour des valeurs "modestes" de n, on peut ignorer le terme $(\delta_1 \delta_2)^n$ sans trop biaiser le résultat.²

Si on ignore le terme $(\delta_1\delta_2)^n$ dans les formules ci-dessus, on obtient des expressions simples et symétriques. Pour les décrire, appelons le joueur qui fait la proposition à la première étape p (pour "proposant") et l'autre r (pour "répondant").

Proposition 7.1: A l'équilibre parfait du marchandage avec un nombre fini d'étapes,

- les joueurs se mettent d'accord à la première étape,
- le joueur qui a le droit de proposer à la première étape propose, approximativement, la répartition qui lui donne $\frac{1-\delta_r}{1-\delta_r\delta_p}$ et l'autre l'accepte.

Nous voyons de cette proposition que la forme mathématique de la répartition approximative est la même pour le jeu à un nombre pair et impair d'étapes (différent des formes dans les deux remarques ci-dessus). Cela n'est pas surprenant, car dans l'approximation choisie l'histoire lointaine (à la fin du jeu) n'importe plus. Et c'est là où la formule exacte fait une différence (en tenant compte de qui fait la dernière offre).

 $^{^{2}}$ A titre d'exemple, on peut considérer le jeu à 20 étapes (n=10), où pour $\delta_{1}=0.9,\ \delta_{2}=0.8,$ on a $(\delta_{1}\delta_{2})^{10}\approx0.037.$ Donc, $\frac{1-(\delta_{1}\delta_{2})^{n}}{1-\delta_{1}\delta_{2}}=3.44,$ et la formule approximative (obtenue en supprimant le terme $(\delta_{1}\delta_{2})^{10}$) donne une répartition de (0.71,0.29) au lieu de la répartition correcte de (0.67, 0.33). L'approximation est donc correcte en considérant uniquement la première décimale après la virgule.

7.2 Le jeu infini

Il est tentant d'essayer d'interpréter la formule simple obtenue à la Proposition 7.1. Mais le jeu qui a donné lieu à cette formule n'est, en fait, pas très intéressant. Rappelons que l'analyse qui a mené à ce résultat a été faite pour un jeu à durée longue, mais fixe et donnée. L'idée derrière cette approche a été de faire une approximation d'un jeu infini (c.-à-d. d'une négociation qui n'a pas a priori de dernière période). Mais, hélas, nous avons fait quelque chose de très différent, et même pire, de non plausible. En fait, qui est capable de conduire une récurrence à rebours tellement compliquée pour un grand nombre d'étapes? Et pourquoi le jeu se termine-t-il après, disons, 245 étapes et non pas après 246?

De ce fait, une négociation (potentiellement) infinie est beaucoup plus plausible. Dans une telle négociation les joueurs ne peuvent pas raisonner par la fin, et typiquement leur raisonnement est basé sur une idée de "stationnarité": "si je fais ceci aujourd'hui et la négociation continue, demain je serai dans une situation similaire à celle d'aujourd'hui …" Ce genre de raisonnement est beaucoup plus réaliste qu'un raisonnement dans lequel les joueurs essaient de considérer une fin lointaine et peu claire.

Mais un tel raisonnement ne peut plus se faire par récurrence à rebours. En fait, rappelons du chapitre 6 que le concept de perfection dans les jeux infinis est défini par la nécessité que les stratégies forment un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu. Nous disposons des outils nécessaires pour analyser le marchandage infini. Et en fait cette analyse nouvelle montre que le résultat proposé à la dernière section n'est pas une aberration. Comme il montre la prochaine proposition, la répartition approximative identifiée dans la Proposition 7.1 est la répartition exacte à l'équilibre parfait dans le marchandage infini.

Proposition 7.2 : Dans le marchandage infini, les stratégies suivantes constituent un équilibre parfait : A chaque étape le joueur qui propose (p) et celui qui répond (r) choisissent

$$x_p^* = \frac{1 - \delta_r}{1 - \delta_r \delta_p} \tag{7.5}$$

$$s_r^*(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \le \frac{1-\delta_r}{1-\delta_r\delta_p} \\ r & \text{si } x > \frac{1-\delta_r}{1-\delta_r\delta_p} \end{cases}$$
 (7.6)

127

Démonstration : Nous devons vérifier qu'aucune déviation de (x_p^*, s_r^*) est profitable. Bien que la stratégie proposée ait une forme simple, rappelons qu'une stratégie dans le marchandage est à priori quelque chose de très complexe : la spécification du comportement du joueur à toute étape t où le marchandage est encore en cours, en fonction du déroulement du jeu jusqu'à ce moment. Si on appelle ce déroulement h_t (pour "histoire"), une stratégie est donc une séquence infinie de fonctions $a_1 = a_1(h_1), a_2 = a_2(h_2), ...,$ où h_1 est soit vide (si le joueur fait la première proposition du jeu), soit correspond à la proposition initiale de l'autre joueur. Si le joueur en question fait la première proposition du jeu, $a_t(h_t) \in [0,1]$ pour t=1,3,5,..., et $a_t(h_t) \in \{a,r\}$ pour t=2,4,6,....

Les déviations de la stratégie proposée peuvent donc être complexes. Notre tâche sera donc fortement simplifiée si nous pouvons nous limiter aux stratégies qui ne dévient que lors d'une étape de la stratégie proposée. Heureusement, le "Principe d'optimalité" de la programmation dynamique que nous formulerons après cette démonstration assure exactement cela.

Considérons donc d'abord, à une étape t donnée, la déviation de x_p^* pour un joueur qui a le droit de faire la proposition à cette étape. Clairement, proposer $x < x_p^*$ n'est pas optimal, car des propositions plus grandes seraient acceptées. Proposer $x > x_p^*$ conduirait à un délai d'une étape après laquelle le joueur obtiendrait, d'après (7.5), $1 - (1 - \delta_p)/(1 - \delta_r \delta_p)$. Mais considéré au temps t, le paiement obtenu en t + 1 serait équivalent à

$$\delta_p \left(1 - \frac{1 - \delta_p}{1 - \delta_r \delta_p}\right) = \delta_p^2 \frac{1 - \delta_r}{1 - \delta_r \delta_p} \tag{7.7}$$

ce qui est plus petit que ce que le joueur obtient avec la stratégie proposée.

Considérons maintenant un joueur qui à une étape t donnée doit répondre à la proposition x_p^* . Toute stratégie qui accepte x_p^* ne change rien pour lui. De l'autre coté, une stratégie qui n'accepte pas x_p^* lui donne $(1 - \delta_p)/(1 - \delta_r \delta_p)$ à la prochaine période, ce qui équivaut à

$$\delta_r \frac{1 - \delta_p}{1 - \delta_r \delta_p} = 1 - \frac{1 - \delta_r}{1 - \delta_r \delta_p} \tag{7.8}$$

évalué en t. La déviation n'est donc pas profitable, ce qui conclut la démonstration.

La démonstration formelle ci-dessus met en évidence deux effets simples que nous connaissons bien du jeu fini : le coût du temps et le first-mover advantage. Dans l'analyse de la déviation du joueur qui propose, ces deux effets se renforcent : avec une déviation le joueur perd deux fois. D'abord il perd une période (ce qui correspond au premier δ_p sur le coté droit de (7.7)) et puis il perd son first-mover advantage (ce qui correspond au deuxième δ_p) Pour le joueur qui répond les deux effets s'opposent : il perd une période, mais il gagne le first-mover advantage. Comme il montre l'égalité (7.8), la proposition x_p^* et le seuil d'acceptation dans l'équilibre considéré sont choisis de façon optimale dans ce sens : les deux effets s'annulent exactement.

Dans la démonstration ci-dessus nous avons utilisé le principe suivant :

Proposition 7.3 (Le Principe d'Optimalité): Soit G un jeu à information parfaite qui est soit fini, soit a la propriété suivante : pour chaque histoire h du jeu (soit finie, soit infinie) l'utilité de tout joueur i a la forme $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t a_{it}(h)$ où $|a_{it}(h)| \leq c$ pour tout h,t et i (les utilités par période sont uniformément bornées). Dans tout jeu ainsi défini une stratégie s_i d'un joueur i est optimale (étant donné les stratégies des autres joueurs) si et seulement s'il n'y a pas d'autre stratégie \widehat{s}_i qui ne diffère de s_i qu'à un seul noeud du jeu et qui rapporte strictement plus au joueur i.

Il est évident que le marchandage infini rentre dans le cadre des jeux décrits à la proposition 7.3. Nous ne démontrons pas cette proposition ici (mais nous en avons en fait démontré la partie "finie" à la Proposition 6.1). Le principe stipule que, si les paiements des joueurs sont additifs à travers le temps, pour vérifier qu'une stratégie est optimale, il n'est pas nécessaire de vérifier des déviations complexes : il suffit de vérifier les déviations qui diffèrent de la stratégie proposée à un seul noeud de l'arbre de jeu.³

La Proposition 7.2 affirme que la combinaison de stratégies dérivées du jeu fini constitue un équilibre parfait du jeu infini. On peut en fait montrer que cet équilibre est unique. Etant donné que dans les jeux infinis il y a "beaucoup plus" de possibilités de dévier et de réagir que dans les jeux finis, ce résultat a de quoi surprendre.⁴ Bien que la démonstration de ce résultat

³Donc dans le marchandage infini, par exemple, il n'est pas nécessaire de considérer la déviation suivante : "aujourd'hui je demande $x > x_p^*$, si cela est réfusé je refuserai lors des 4 prochaines périodes toute proposition qui me donne moins que 1 et demanderai à mon tour 1, si cela n'aboutit pas à un accord je demanderai dans 5 périodes et jusqu'à ce qu'un accord soit conclut x pour moi et je n'accepterai pas d'offre qui me donne moins que 1".

⁴Mais l'unicité de l'équilibre n'est pas un phénomème général dans les jeux de négociation. Il y a plusieurs variations du jeu de marchandage tel que défini ici, qui possèdent un grand nombre d'équilibres différents.

129

n'est pas très difficile,⁵ nous ne la donnons pas ici, mais nous formulons un résultat plus simple. Pour cela nous avons besoin de la définition suivante.

Définition : Une stratégie dans le marchandage infini est appelé stationnaire si le comportement du joueur ne dépend que du fait qu'il propose ou qu'il répond.

Etant donné que le seul élément important dans la stratégie de réponse d'un joueur est la valeur maximale (proposée par l'autre joueur pour luimême) qu'il est prêt à accepter, une stratégie stationnaire peut être décrite par deux chiffres : x, la valeur qu'on propose de garder pour soi-même si on a le droit de proposer, et y, le seuil de rejet par rapport à la proposition de l'autre, si l'autre propose.

Proposition 7.4 : L'équilibre identifié à la Proposition 7.2 est le seul équilibre parfait stationnaire du marchandage infini.

La démonstration de cette proposition est instructive et montre bien les différents aspects de l'optimisation dynamique derrière la détermination de l'équilibre parfait.

Démonstration : Rappelons qu'un équilibre stationnaire est constitué de 4 chiffres, (x_1, y_1) pour le joueur 1 et (x_2, y_2) pour le joueur 2. Ici, x_i est ce que le joueur i propose s'il a le droit de faire une offre, et y_i est le seuil dans sa stratégie de réponse :

$$s_i(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \le y_i \\ r & \text{si non} \end{cases}$$

A priori, il y a maintenant quatre possibilités. Soit on a $x_1 > y_2$ et $x_2 > y_1$. Dans ce cas les deux joueurs proposent plus que ce que l'autre est prêt à accepter et il n'y a pas d'accord. La deuxième possibilité est $x_1 > y_2$ et $x_2 \le y_1$, ce qui signifie qu'il y a un accord quand le joueur 2 propose et désaccord quand 1 propose. Inversement, le troisième cas est $x_1 \le y_2$ et $x_2 > y_1$. Et finalement, si $x_1 \le y_2$ et $x_2 \le y_1$ les joueurs se mettent d'accord à chaque tour (donc en particulier au premier). En ce qui suit, nous éliminons d'abord les trois premières possibilités.

⁵Comme d'habitude "ne pas très difficile" seulement si on sait comment. En fait, la démonstration originale de l'unicité de Rubinstein (1982) est complexe. C'est seulement grâce à une belle idée de Shaked et Sutton (1984) que la démonstration est dévenue "simple".

L'issue $x_1 > y_2$, $x_2 > y_1$ n'est clairement pas possible à l'équilibre parfait, car avec ce comportement, les deux joueurs obtiennent 0. Donc si le joueur 1 propose (n'importe quel) x < 1 à la première étape, le joueur 2 a intérêt à accepter cette offre et donc à dévier de sa stratégie originale.

L'issue $x_1 > y_2$, $x_2 \le y_1$ est un peu plus complexe. Notons d'abord que l'optimalité de x_2 implique que $x_2 = y_1$ (autrement le joueur 2 laisserait le montant $y_1 - x_2$ sur la table). Ensuite l'optimalité de y_2 implique que $y_2 \ge 1 - \delta_2 x_2$ (car le joueur 2 doit accepter toute offre strictement plus petite que $1 - \delta_2 x_2$ au premier tour, étant donné qu'il obtient x_2 au deuxième tour). De plus, il est impossible que $y_2 > 1 - \delta_2 x_2$ (dans ce cas, le joueur 2 accepterait des offres qui lui donnent strictement moins que ce qu'il obtient en attendant le deuxième tour). A l'équilibre parfait il faut donc que $y_2 = 1 - \delta_2 x_2$. Finalement, l'optimalité de x_1 nous amène maintenant à la contradiction désirée : avec la stratégie proposée, le joueur 1 obtient $\delta_1(1-x_2)$, cependant il obtient

$$x_1 = y_2 = 1 - \delta_2 x_2 > \delta_1 (1 - x_2)$$

s'il choisit $x_1 = y_2$ (donc fait une proposition immédiatement acceptable).

L'issue $x_1 \leq y_2$, $x_2 > y_1$ étant éliminée de façon similaire, il reste le seul cas $x_1 \leq y_2$, $x_2 \leq y_1$, celui d'un accord immédiat à toute étape. Comme cidessus, l'optimalité de x_1 et x_2 implique clairement $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$. Etant donné qu'il y accord au premier tour, le joueur 2 doit obtenir exactement ce qu'il obtiendrait en attendant (rejeter plus ne serait pas crédible, rejeter moins stupide). Donc $y_2 = 1 - \delta_2 y_1$. De façons similaire nous déduisons de la perspective du joueur 1 que $y_1 = 1 - \delta_1 y_2$. En combinant ces deux égalités nous obtenons

$$y_1 = 1 - \delta_1 y_2 = 1 - \delta_1 (1 - \delta_2 y_1)$$

 $y_1 = \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1 \delta_2}$

et le résultat symétrique pour y_2 .

L'équilibre identifié à la proposition 7.2 est donc le seul équilibre parfait stationnaire (rappelons que nous avons démontré son existence à la proposition 7.2 déjà).

L'équilibre identifié aux propositions 7.2 et 7.3 a plusieurs propriété intéressantes. Pour une brève discussion de celles-ci, considérons d'abord le cas de préférences intertemporelles identiques, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Dans ce cas, le

131

joueur qui propose le premier obtient $\frac{1-\delta}{1-\delta^2} = \frac{1}{1+\delta}$ et l'autre $1-\frac{1}{1+\delta} = \delta$. Les propriétés suivantes découlent directement de ces formules.

- (i) Le résultat est efficace. Les joueurs se mettent donc d'accord tout ce suite et ne gaspillent pas de ressources par des délais.
- (ii) L'avantage du dernier coup ("last mover advantage") disparaît complètement. Cet avantage se faisait se remarquer encore dans le jeu fini (résultats 1 et 2).
- (iii) Le joueur qui fait la première proposition obtient plus que l'autre. Il y a donc un avantage du premier coup ("first mover advantage"), comme au jeux fini.
- (iv) Si $\delta \approx 1$ (les deux joueurs sont très patients), la répartition est à peu près égale à $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dans ce cas, le résultat est donc "juste", non pour des raisons éthiques, mais parce que les pouvoirs de négociation des deux joueurs sont à peu près égaux.
- (v) Soit $\delta = \frac{1}{(1+\varsigma)^h}$, où ς est le taux d'intérêt (préférence temporelle) par unité de temps (par exemple par jour) et h le nombre d'unités de temps entre deux propositions. Si les propositions alternent de plus en plus vite (h décroît), δ s'accroît, ce qui implique que la répartition devient de plus en plus égale. A la limite on a $\delta \to 1$, et la répartition égalitaire s'obtient.

Dans le cas des préférences intertemporelles différentes $(\delta_p \neq \delta_T)$, nous avons les compléments et modifications suivantes :

- (vi) Plus un joueur est impatient, moins il obtient. En fait, la quantité reçue à l'équilibre est une fonction croissante de δ_i .
- (vii) Le "first mover advantage" peut être surcompensé par l'effet d'impatience : si δ_p est suffisamment petit, le premier proposant doit laisser la partie la plus grande du gâteau à l'autre joueur.

Le modèle de marchandage de Rubinstein est un point de référence important pour beaucoup d'analyses de négociation et de conflit. Mais il n'est qu'un point de départ pour l'analyse de certains cas plus complexes. Parmi les caractéristiques du modèle qui ont donné lieu à des analyses plus approfondies notons les deux suivants :

L'issue du jeu est efficace - en réalité, ce n'est pas toujours le cas.
 En particulier, dans certains cas des délais coûteux arrivent dans des négociations.

– Souvent les joueurs ont la possibilité d'entreprendre des actions supplémentaires dommageables telles que les grèves, une possibilité qui est absente dans le modèle de Rubinstein.

7.3 Problèmes

Question 7.1:

Considérez le jeu de marchandage suivant. Deux joueurs doivent se mettre d'accord sur la répartition d'un prix de taille 1. La négociation se fait par des offres à tour de rôle : à la première étape, le joueur 1 propose une répartition au joueur 2; si le joueur 2 n'accepte pas cette offre, il peut, à la deuxième étape, faire une contre-offre; ensuite, si le joueur 1 n'accepte pas l'offre du joueur 2, il peut, à la troisième étape, faire une contre-offre, etc. En outre, le joueur 2, et seulement lui, à chaque fois qu'il doit répondre à une offre du joueur 1, a la possibilité de quitter la négociation unilatéralement pour obtenir un paiement de 0, 7. En ce cas, le joueur 1 n'obtient rien.

Si, après un nombre prédéterminé et connu d'étapes T, le marchandage est encore en marche et les joueurs ne se sont pas mis d'accord, le prix disparaît et les deux joueurs obtiennent 0. On suppose qu'entre deux étapes un certain temps se passe et que les joueurs actualisent leurs gains à chaque étape avec un facteur d'actualisation commun de $\delta = 0, 8$. Tout cela est connu des joueurs.

- 1. Dessinez l'arbre de jeu pour le marchandage à deux étapes (T=2).
- 2. Déterminez les équilibres parfaits en ce cas. On entend souvent que l'option de réaliser un certain gain unilatéralement renforce le pouvoir de négociation. Qu'en pensez-vous au vu de votre résultat?
- 3. Dessinez l'arbre de jeu pour le marchandage à quatre étapes (T=4).
- 4. Déterminez l'issue du marchandage à l'équilibre parfait du jeu en ce cas. Que pensez-vous de votre réponse au point 2?
- 5. Formulez une hypothèse pour le cas de T arbitraire.

Question 7.2:

Deux enfants (rationnels), appelés A et B, négocient la répartition d'un gâteau. Le père a coupé le gâteau en quatre pièces et enlevé le couteau. Les répartitions possibles sont donc (x, 1-x) = (0,1), (1/4,3/4), (1/2,1/2), (3/4,1/4), (1,0), où x dénote la part du gâteau obtenue par A. La négociation se fait à tour de rôle, c'est l'enfant B qui fait la dernière offre. A chaque tour $t \ge 1$ un enfant fait une proposition $x_t \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ (où x_t dénote la part du gâteau obtenue par A) et l'autre a le droit soit d'accepter cette

proposition, soit de la rejeter. Si la proposition est acceptée, la négociation est terminée, la répartition étant $(x_t, 1-x_t)$. Si la proposition est rejetée, un nouveau tour commence dans lequel les rôles sont invertis. Chaque enfant actualise le temps avec un facteur d'actualisation $\delta = 0.8$ par tour. Si la négociation n'est pas terminée après T tours, le père intervient et confisque le gâteau, ce qui donne (0,0) aux enfants.

- 1. Pour T=3, déterminez les équilibres parfaits de ce jeu. En particulier, l'issue d'équilibre parfait est-il unique? Et est-ce possible que les enfants ne se mettent pas d'accord tout de suite (à t=1)?
- 2. Généralisez vos résultats au cas T arbitraire.
- 3. Comparez avec le cas du marchandage discuté au cours. Interprétation?
- 4. Comment vos résultats changent-ils si $\delta = 0.7$? Et si $\delta = 0.9$?

Question 7.3:

Dans le jeu de marchandage de Rubinstein à T étapes $(1 < T \le \infty)$ discuté dans le texte, considérez les stratégies suivantes. On fixe une valeur $w \in (0,1)$. A chaque période où la négociation est encore en cours, et que le joueur 1 est en droit de faire une offre, il propose x = w. Si le joueur 2 est en droit de proposer à cette période, le joueur 1 accepte l'offre y si et seulement si $y \le 1 - w$ (rappelez que x et y sont ce que le joueur propose de garder pour soi-même). De façon analogue, le joueur 2 à chaque période où c'est son tour de faire une offre propose y = 1 - w, et à chaque période où il doit répondre, il accepte si et seulement si $x \le w$.

- 1. Montrez que ces stratégies forment un équilibre de Nash pour tout w. Interprétation?
- 2. Montrez qu'en général, ces stratégies ne forment pas d'équilibre parfait, si $\delta_i < 1$ pour un joueur.
- 3. Supposez maintenant que les deux joueurs n'actualisent pas le coût du temps (donc que $\delta_1 = \delta_2 = 1$) et que $T = \infty$. Montrez que ces stratégies forment un équilibre parfait pour tout w. Interprétation?

Chapitre 8

Jeux à information imparfaite

8.1 Théorie

Les jeux dynamiques que nous avons considérés jusqu'à présent affichent tous les deux propriétés suivantes :

- Les joueurs prennent leurs actions les uns après les autres, et
- lorsque c'est à eux de jouer, les joueurs connaissent les choix des joueurs qui ont eu la main avant eux.

Dans de nombreux cas cependant, ces propriétés ne sont pas vérifiées, soit parce que certains joueurs font leurs choix de manière simultanée, soit parce qu'au moment de leur décision, ils n'ont pas pu observer tout ce qui s'est passé jusqu'à ce moment-là. C'est ce type d'interaction dynamique, dite d'information imparfaite, que nous étudions maintenant.

Commençons par un exemple. Un employé travaille dans une firme. Celleci lui paie un salaire w pour qu'il accomplisse son cahier des charges avec un effort donné. L'employé peut travailler avec plus ou moins d'effort, ce qui influence la valeur de son travail aux yeux de la firme. Plus précisément, on suppose que l'effort de l'employé peut être mesuré par un nombre ("index d'intensité") e. Des valeurs basses de e indiquent des efforts faibles. La valeur du travail pour la firme dépend de e et est égal à $\Pi(e, w)$, où w est le salaire de l'employé. De façon similaire, l'utilité que l'employé tire de cette position, u(e, w), dépend aussi de l'effort, ainsi que du salaire. Dénotons par \overline{e} l'effort

¹Nous ne modélisons donc pas explicitement les aspects non-pécuniaires des relations de travail, qui sont empiriquement importants. On peut les intégrer dans ce modèle, par exemple, en supposant que l'employé est prêt à faire des efforts raisonnables et que son

minimal demandé par l'entreprise. Pour rendre le problème intéressant et réaliste, supposons que la firme (c.-à-d. les supérieurs de l'employé) n'est pas en mesure d'observer directement l'effort fourni effectivement par l'employé, mais qu'elle peut contrôler celui-ci. Si la firme effectue un contrôle et qu'elle constate que l'employé a fourni un niveau d'effort $e < \overline{e}$, l'employé est licencié avec un salaire de 0. Si la firme effectue un contrôle et constate que $e \ge \overline{e}$, ou si la firme n'effectue pas de contrôle, l'employé obtient le salaire w comme il est stipulé dans son contrat de travail.

Comment pouvons-nous décrire et analyser cette interaction en termes de jeu dynamique, c'est-à-dire en utilisant le concept de la forme développée? Le problème immédiat qui se pose est que l'employeur, au moment où il détermine s'il veut effectuer un contrôle, ne sait pas ce que l'employé a fait avant. En fait, cela est la caractéristique-clé de tout problème de contrôle : si le contrôleur savait que le contrôle est nécessaire, l'employé contrôlé ferait de sorte que ce contrôle se passe bien, ce qui, par conséquence, rendrait le contrôle superflu. Une telle situation n'est pas prévue dans le concept de l'arbre de jeu tel que nous l'avons défini au chapitre 6.

A ce problème de description s'associe immédiatement un problème d'analyse, de nature apparentée : la procédure de récurrence à rebours que nous avons utilisée pour identifier des comportements dynamiques raisonnables suppose qu'à tout noeud, le joueur qui a la main peut parfaitement évaluer les conséquences de son action. Mais cela n'est pas possible s'il ne sait pas ce que l'autre joueur a fait avant lui.

Heureusement, en utilisant une approche proposée par Selten (1965, 1975), il est possible de généraliser la notion de rationalité séquentielle définie au chapitre 6 à ces "jeux à information imparfaite". Le premier pas de cette démarche consiste à intégrer la notion d' "action inobservée" dans le concept de l'arbre de jeu :

Définition : Un ensemble de noeuds de décision d'un joueur dans un arbre de jeu est appelé "ensemble d'information", si

- au moment où, dans le déroulement du jeu, un noeud de cet ensemble est atteint, le joueur sait que l'ensemble est atteint, mais ne sait pas à quel noeud,

aversion aux efforts supplémentaires monte à partir d'un certain seuil d'effort qui dépend de la qualité de l'environnement de travail. Tous cela est "caché" dans la fonction d'utilité u.

8.1. THÉORIE 137

- les actions que peut prendre le joueur à chacun des noeuds de cet ensemble sont identiques.

A titre d'exemple, la figure 8.1 donne l'arbre de jeu du jeu entre la firme (F) et l'employé (E) décrit ci-dessus. Dans le graphique, nous supposons que l'employé peut choisir 3 niveaux d'efforts et nous supprimons les paiements aux noeuds terminaux. La ligne discontinue relie les trois noeuds d'effort de l'employé, que la firme ne peut pas distinguer quand elle a la main. Ces trois noeuds constituent donc un ensemble d'information.

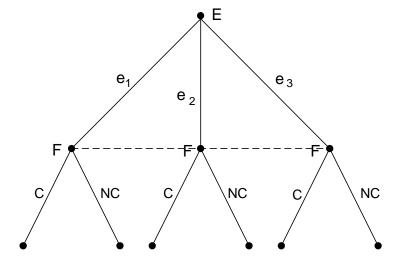


Fig. 8.1 – Le jeu de côntrole

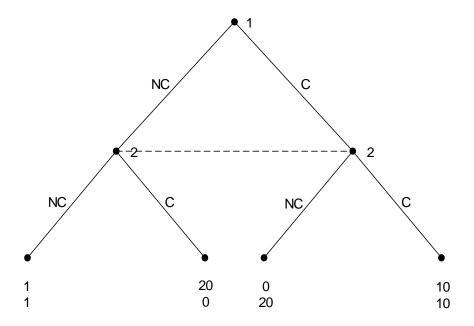


Fig. 8.2 – Le dilemme du prisonnier

Il est intéressant de noter que dans cet exemple le choix d'effort par l'employé et la décision de vérification de l'employeur peuvent être considérés comme étant pris simultanément : au moment où l'employé agit, il ne connaît pas la décision de l'employeur (car celui-ci intervient plus tard). De même, quand l'employeur agit, il ne connaît pas le choix de l'employé (car ceci lui est caché).

Cette observation peut aussi être interprétée dans la direction inverse. En fait, elle nous permet de décrire les jeux statiques tels qu'étudiés à la première partie du cours, par une forme développée en utilisant la notion d'ensemble d'information. Ainsi la Figure 8.2 présente le dilemme du prisonnier sous forme développée.

Il est donc apparent que tout jeu sous forme normale peut être représenté comme un jeu sous forme développée. Mais cette représentation n'est pas nécessairement unique comme le montre la figure 8.3 qui est une autre description du dilemme du prisonnier, différente de celle de la figure 8.2.

8.1. THÉORIE 139

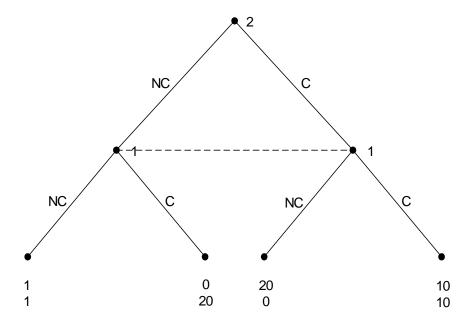


Fig. 8.3 – Une autre présentation du dilemme du prisonnier

Avec le concept d'ensemble d'information à notre disposition, nous pouvons généraliser le concept de la forme développée aux situations où l'information est imparfaite :

Définition : La forme développée d'un jeu à information imparfaite est la donnée d'un arbre de jeu, avec les ensembles d'information qui s'y rapportent. Une stratégie d'un joueur dans un tel jeu est un plan qui associe une action à tout ensemble d'information de ce joueur.

Pour généraliser les concepts de la récurrence à rebours et de l'équilibre parfait aux jeux sous forme développée à information imparfaite, il nous faut une extension appropriée du concept du sous-jeu. Au chapitre 6, nous avons défini les sous-jeux comme toute partie de l'arbre qui commence à un noeud arbitraire donné et inclut tout noeud à partir de celui-ci. Cette définition a permis de décrire le raisonnement d'un joueur à tout moment où il a la main : il choisit son action en connaissant le passé du jeu jusqu'à ce moment-là et en comprenant les intentions des autres joueurs dans l'avenir. Si l'information est imparfaite, ce raisonnement doit être modifié et on ne peut pas choisir

n'importe quel noeud comme origine d'un sous-jeu. La raison est simple : le sous-jeu doit représenter la structure d'information du jeu entier. Car si on choisissait un sous-jeu avec des noeuds qui sont contenus dans des ensembles d'information au-delà du sous-jeu, le joueur dont c'est le tour à un tel noeud aurait plus d'information dans le sous-jeu par rapport à ce qu'il saurait à ce même noeud dans le jeu entier. Le sous-jeu ne décrirait donc pas la situation de décision du joueur dans le jeu entier.

Ce problème apparaît de manière immédiate lorsqu'on choisit comme origine d'un sous-jeu un noeud qui appartient à un ensemble d'information plus grand. Si on choisissait un tel noeud, le joueur dont c'est le tour à ce noeud saurait, dans le sous-jeu, qu'il se trouve à ce noeud, chose qu'il n'aurait pas connaissance dans le jeu original. Le jeu d'effort entre l'employé et l'employeur décrit plus haut n'a donc pas de sous-jeu (sauf le jeu entier).

Le cas général est légèrement plus subtil. Pour voir le problème, considérons le jeu suivant à titre d'exemple. Le jeu a trois joueurs, deux enfants et le père. Le père fait un gâteau, et les deux enfants doivent se mettre d'accord sur la répartition. Ils peuvent choisir d'être soit "insolents" soit "modestes". S'ils sont tous les deux insolents, il y a un grand bruit, le père est averti, et il mange le gâteau seul. Si au moins un des enfants est modeste, il n'y a pas de conflit entre les enfants, le père se réserve une partie du gâteau et donne le reste aux enfants, qui divisent le gâteau comme convenu. Dans la négociation entre les enfants, l'aîné (enfant 1) choisit le premier.

8.1. THÉORIE 141

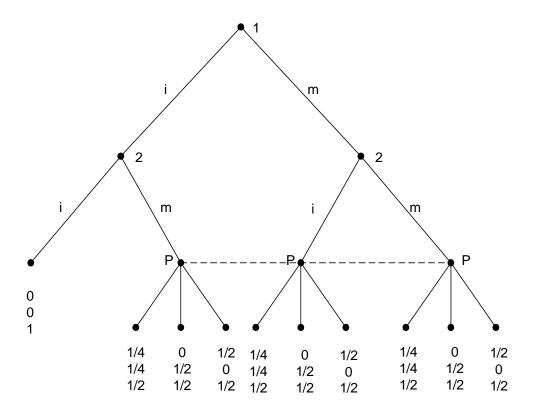


Fig. 8.4 – La répartition du gâteau

La forme développée de ce jeu est donnée à la figure 8.4. Aux noeuds terminaux sont associées les répartitions, et non pas les utilités dérivées de ces répartitions. Le vecteur de répartitions donne d'abord celle de l'enfant 1, ensuite celle de l'enfant 2, et en troisième position celle du père. Bien que les deux noeuds où l'enfant 2 choisit sont des noeuds isolés, étant donné qu'ils n'appartiennent pas à un ensemble d'information plus grand, ils ne peuvent pas servir comme origine d'un sous-jeu. La raison est liée au fait que dans un tel sous-jeu, le père saurait plus de choses que dans le jeu original et pourrait donc, par exemple, modifier la répartition entre les enfants en fonction de leur comportement. Le jeu n'a donc pas de sous-jeu, outre le jeu entier.

Nous posons donc la définition suivante.

Définition : On appelle sous-jeu d'un jeu sous forme développée tout arbre de jeu obtenu en prenant comme origine un noeud non terminal de l'arbre

initial, tel que pour tout noeud du sous-jeu l'ensemble d'information auquel il appartient fait partie du sous-jeu ("le sous-jeu n'intersecte pas des ensembles d'information").

Nous pouvons maintenant reprendre, mot pour mot, la définition de l'équilibre parfait donnée au chapitre 6.

Définition : Soit un jeu sous forme développée à information imparfaite à n joueurs. Un équilibre parfait (ou "équilibre parfait sur les sous-jeux") est un ensemble de stratégies $s_1, ..., s_n$ qui génère un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu. Plus précisément : $(s_1, ..., s_n)$ est parfait s'il a la propriété suivante : pour tout sous-jeu les restrictions de $s_1, ..., s_n$ à ce sous-jeu forment un équilibre de Nash du sous-jeu.

Si le jeu a un nombre fini d'étapes, la notion de perfection ci-dessus généralise le concept de la récurrence à rebours, tel que défini pour les jeux à information parfaite, aux jeux avec des coups simultanés. En fait, si le jeu est fini, la logique de perfection est la même qu'auparavant : partant des noeuds terminaux, on remonte dans l'arbre de jeu jusqu'à l'origine, en résolvant chaque fois un problème, soit de décision unilatérale, comme dans les jeux à information parfaite, soit de décision multilatérale, ce qui est le nouvel élément introduit dans ce chapitre.

8.2 Application : Echanges internationaux et droits de douane

Cette application étudie une des questions les plus importantes du commerce mondial : les gouvernements devraient-ils intervenir dans le commerce mondial en percevant des droits de douane? Depuis des siècles, les gouvernements ont perçu des droits de douane, qui ont constitué pour les souverains d'antan comme pour les gouvernements démocratiques d'aujourd'hui, une source de revenu bienvenue.

Selon les critiques de ces interventions, les échanges internationaux renforcent la concurrence sur les marchés nationaux et élargissent l'offre dans tous les marchés nationaux; ils sont donc désirables. Les interventions ne profitent donc qu'au gouvernement au détriment des consommateurs.

Pour les avocats des interventions, surtout dans les branches dans lesquelles un pays a des capacités de production, l'offre internationale n'est pas nécessaire, elle réduit même les profits, donc l'emploi domestique. De plus, le gouvernement peut financer avec ces recettes des dépenses qui autrement ne seraient pas possibles ou pour lesquelles il devrait prélever d'autres impôts. Si le gouvernement prend tous les aspects du bien-être économique national en considération, les droits de douane sont donc souhaitables.

Pour analyser ce problème au-delà des beaux discours, nous modélisons l'interaction entre gouvernements et marchés (c'est-à-dire consommateurs et producteurs) d'une manière précise. Pour que l'analyse soit utile, il faut prendre en considération au moins les deux éléments importants suivants :

- Les produits étrangers doivent être "similaires" aux produits nationaux.
 En cas contraire, l'argument en faveur du libre-échange est évident (par exemple, l'exportation de montres et l'importation de voitures en Suisse).
- Les gouvernements doivent prendre en considération tous les coûts et bénéfices de l'intervention et maximiser le "bien-être" national.

Nous considérons donc le modèle suivant. Il y a deux pays, i=1,2, chacun avec son gouvernement. On considère le marché d'un bien homogène donné. Le marché du bien dans le pays i est représenté par sa fonction de demande

$$p_i = a_i - b_i Q_i \quad (Q_i < \frac{a_i}{b_i})$$

Les producteurs dans le pays i sont décrits par une seule fonction de production (donc, pour simplifier nous supposons que les producteurs agissent comme un seul producteur, appelé le "producteur i"). Nous supposons des coûts marginaux constants, c_i pour le producteur i, ainsi que l'absence de coûts fixes.

Les producteurs dans les deux pays produisent pour le marché de leur propre pays et pour l'exportation. Soit h_i la production de i pour le marché i ("home production") et e_i la production de i pour l'autre pays "exports"). Le coût total du producteur i est donc

$$C_i(h_i, e_i) = c_i(h_i + e_i)$$

et la quantité totale offerte dans pays i est $Q_i = h_i + e_j, j \neq i$.

Les hypothèses sur la concurrence sont les suivantes :

– Nous sommes en présence de concurrence à la Cournot : les deux producteurs choisissent les quantités qu'ils veulent vendre ; ensuite les prix p_1 et p_2 sur les marchés nationaux s'ajustent de manière à ce que tout soit vendu.

– La concurrence sur les marchés nationaux est influencée par les droits de douane en vigueur dans les deux pays. Si le producteur i exporte e_i au pays j, il paie $t_j e_i$ au gouvernement j, où t_j est le taux de droit de douane en vigueur dans le pays j.

Plus précisément, nous considérons le jeu dynamique suivant :

- 1. Les deux gouvernements 1 et 2 déterminent les taux des droits de douane, t_1 et t_2 , de leur pays respectifs.
- 2. Les producteurs des deux pays déterminent leur production, (h_1, e_1) et (h_2, e_2) .
- 3. Les marchés dans les deux pays s'équilibrent et les consommateurs consomment.

Notons qu'une fois les décisions des étapes 1 et 2 sont prises, l'étape 3 est complètement mécanique. Nous avons donc un jeu à information incomplète à 2 étapes. Dans ce jeu il y a quatre joueurs : les deux gouvernements et les deux producteurs. En ce qui concerne les fonctions d'utilité des joueurs, celles des producteurs sont standard. Si on suppose que le producteur i est neutre au risque et cherche à maximiser son profit, il maximise :

$$\pi_i = \pi_i(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2)$$

= $[a_i - b_i(h_i + e_i)] h_i + [a_j - b_j(h_j + e_i)] e_i - c_i(h_i + e_i) - t_j e_i$

Le gouvernement i est supposé "bienveillant" et prend en considération tous les éléments de son intervention, qui sont

- les conséquences pour le bien-être des consommateurs
- les conséquences pour les profits des entreprises (le "producteur i")
- les recettes des droits de douane qu'il touche lui-même.

Le bien-être des consommateurs peut être mesuré comme la somme des bien-êtres individuels et correspond donc à la surface entre la courbe de demande et la droite $p = \overline{p}$. La figure 8.5 en donne une illustration.

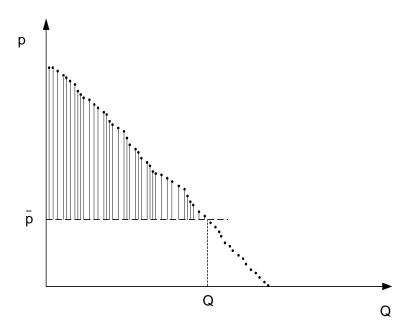


Fig. 8.5 – Fonction de demande et bien-être des consommateurs

Ici, avec $p = a_i - b_i Q_i$, le bien-être agrégé est donc $\frac{1}{2}(a_i - p)Q_i = \frac{1}{2}b_i Q_i^2$. Par conséquence, la fonction d'utilité du gouvernement est :

$$W_i = \frac{1}{2}b_iQ_i^2 + \pi_i + t_ie_j$$

Ceci complète la description du jeu. On peut à présent appliquer nos outils pour procéder à son analyse afin d'obtenir les prédictions du modèle.

Etant donné que les entreprises réagissent à la politique économique des gouvernements, il convient de déterminer les équilibres parfaits. Le jeu a un seul sous-jeu, il s'agit de l'interaction entre les deux producteurs. Dans ce sous-jeu, t_1 et t_2 sont donnés. Pour simplifier, supposons que $b_1=b_2=1$. Le producteur i cherche à maximiser

$$\max_{h_i, e_i} \pi_i(t_1, t_2, h_1, e_1, h_2, e_2)$$

$$= (a_i - e_j)h_i - h_i^2 + (a_j - h_j)e_i - e_i^2 - c_ih_i - c_ie_i - t_je_i$$

$$= (a_i - c_i - e_j)h_i - h_i^2 + (a_j - c_i - h_j - t_j)e_i - e_i^2$$

Le problème se décompose donc en deux sous-problèmes et on obtient

$$h_i = \frac{1}{2}(a_i - c_i - e_j),$$

 $e_i = \frac{1}{2}(a_j - c_i - h_j - t_j)$

Le couple des valeurs (h_i, e_i) représente la meilleure réponse de i au comportement de j. A l'équilibre de Nash du sous-jeu, on a donc les quatre égalités suivantes :

$$h_1 = \frac{1}{2}(a_1 - c_1 - e_2), \quad e_1 = \frac{1}{2}(a_2 - c_1 - h_2 - t_2),$$

 $h_2 = \frac{1}{2}(a_2 - c_2 - e_1), \quad e_2 = \frac{1}{2}(a_1 - c_2 - h_1 - t_1)$

En résolvant ces quatre équations en quatre inconnues, on obtient :

$$h_i = \frac{1}{3}(a_i - 2c_i + c_j + t_i)$$
 $e_i = \frac{1}{3}(a_j + c_j - 2c_i - 2t_j)$ (8.1)

Pour mieux comprendre l'intuition derrière ces résultats notons que

- la taille du marché, le coût marginal du concurrent et le niveau des droits de douane domestiques ont une influence positive sur h_i , e_i ,
- le coût marginal national et le niveau des droits de douane étrangers ont une influence négative sur h_i, e_i .

Notons également que h_i et e_i sont des "plans" dans le sens des jeux dynamiques :

$$h_i = h_i(t_1, t_2), \quad e_i = e_i(t_1, t_2).$$

Ils décrivent le comportement des marchés en fonction de la politique douanière. En utilisant (8.1), on peut ainsi calculer les profits des producteurs à l'équilibre du sous-jeu :

$$\pi_i = \frac{1}{9}(a_i - 2c_i + c_j + t_i)^2 + \frac{1}{9}(a_j - 2c_i + c_j - 2t_j)^2.$$
 (8.2)

Ayant étudié le sous-jeu, nous recherchons maintenant les équilibres du jeu entier. En utilisant les plans dans le sous-jeu (correspondant aux comportements anticipés), les gouvernements doivent déterminer leurs droits de douane. Pour cela ils maximisent :

$$\max_{t_i} W_i(t_i, t_j) = \frac{1}{2} (h_i + e_j)^2 + \pi_i + t_i e_j$$

On vérifie que $h_i + e_j = \frac{1}{3}(2a_i - c_i - c_j - t_i)$. Les droits de douane domestiques réduisent donc le bien-être des consommateurs du pays, bien qu'ils augmentent le profit des entreprises du pays. En utilisant (8.2), nous obtenons :

$$W_i(t_i, t_j) = \frac{1}{18} (2a_i - c_i - c_j - t_i)^2 + \frac{1}{9} (a_i - 2c_i + c_j + t_i)^2 + \frac{1}{9} (a_j - 2c_i + c_j - 2t_j)^2 + \frac{1}{3} t_i (a_i + c_i - 2c_j - 2t_i)$$

Le maximum de W_i par rapport à t_i est donné par la condition de première ordre (parce que W_i est strictement concave, la condition de première ordre est nécessaire et suffisante). Cette condition est une équation linéaire, qui donne le résultat simple suivant :

$$t_i^* = \frac{1}{3}(a_i - c_j), j \neq i.$$

Le choix optimal de t_i ne dépend donc pas du niveau t_j choisi par l'autre pays. Par conséquence, t_i^* est une stratégie dominante.²

Notre analyse donne donc une réponse univoque à notre question de départ. En particulier, nous constatons que $t_1^*, t_2^* > 0$: à l'équilibre parfait les pays trouvent des intérêts à percevoir des droits de douane. Le modèle est donc consistent avec l'existence très répandue des droits de douane dans le monde.

En fait, le modèle nous permet également de juger ces politiques d'une perspective normative. Etant donné que nous avons exprimé tous les coûts et bénéfices dans les deux pays dans les mêmes unités et que ces valuers sont transférables, la mesure naturelle du bien-être collective dans les deux pays est la somme des W_i . On laissera on au lecteur/à la lectrice la tâche de vérifier que ce "bien-être international", $W(t_1, t_2) = W_1(t_1, t_2) + W_2(t_1, t_2)$, est maximisé par $t_1 = t_2 = 0$. Ce résultat est intéressant parce qu'il est plus fort que l'argument traditionnel que le libre commerce maximise le bien-être collectif. En fait, dans le modèle de ce chapitre nous nous sommes basés sur un modèle de concurrence imparfaite et nous avons explicitement ténu compte des bénéfices monétaires que les droits de douane génèrent pour les gouvernements (ce qui n'est normalement pas le cas dans les modèles d'équilibre général utilisés dans la théorie du commerce international). Nous retrouvons

²Dans d'autres modèles, par exemple, si les coûts marginaux ne sont pas constants, l'équilibre n'est pas en stratégies dominantes.

donc le résultat classique que le libre échange est optimal même dans le cadre de cet analyse plus réaliste.

Le fait que $W_i(t_1^*, t_2^*) < W_i(0, 0)$ et que les t_i^* sont indépendants des t_j^* , $j \neq i$, montre que les gouvernements qui doivent décider des droits de douane se trouvent dans une situation de dilemme du prisonnier. Bien qu'il soit optimal de conjointement abolir les droits de douane, chaque pays individuellement a intérêt à les mettre en place pour protéger ses propres entreprises et réaliser des recettes supplémentaires. L'analyse montre donc que considérer le bien-être national en isolation n'est pas suffisant et que, dans la mesure du possible, les gouvernements devraient conclure des traités qui interdisent le prélèvement de droits de douane.

8.3 Application : Les attaques spéculatives sur les devises

La stabilité des devises est un problème considérable en macroéconomie internationale. Illustrée par un grand nombre d'exemples, le plus récent étant le cas de l'Argentine en Janvier 2002, cette question dépasse de loin les seuls intérêts de quelques financiers internationaux. Normalement, les crises financières internationales sont déclenchées par une gérance inadéquate par le gouvernement d'un taux de change fixe. Nous considérons donc ici un modèle de spéculation internationale en régime de taux fixe.

Le gouvernement désire maintenir un taux de change de sa monnaie fixe, e^* (où e^* désigne la quantité de dollars obtenue pour une unité de la devise nationale). Maintenir un taux de change fixe signifie que le gouvernement est obligé de vendre ou d'acheter n'importe quelle quantité de la monnaie à ce taux. Un nombre N d'investisseurs sur le marché monétaire international (appelés dès lors des spéculateurs) sont prêts à tester cette promesse pour faire un profit avec la stratégie classique suivante ("short-selling") :

- 1. emprunter une unité de la devise à court terme (par exemple, pour une journée) sur le marché financier national du pays en question,
- 2. vendre cette unité contre e^* dollars,
- 3. à l'échéance du prêt racheter l'unité avec e dollars,
- 4. rembourser le prêt.

Si le gouvernement a dévalué sa monnaie entre-temps, c'est à dire si $e < e^*$, et si les coûts de transaction ne sont pas trop élevés, cette stratégie est profitable.

La question principale dans ce contexte est évidemment pourquoi un gouvernement choisirait une politique de taux de change fixe à tout prix? Ou autrement formulé, pourquoi le gouvernement ne dévaluerait-il pas sa devise sans autre, surtout dans une situation de spéculation telle que décrite cidessus? Malheureusement, la question de la raison d'être des taux de change fixes est trop vaste pour être discutée ici (voir, par exemple, Krugman et Obstfeld (1988)). Notons cependant qu'il y a un certain nombre de bonnes raisons pour une telle politique, telle que la stabilité des prix des importations et des exportations. Toutefois, cette politique a aussi ses désavantages. En particulier, il y a des raisons justifiant une dévaluation, parce que la promesse de payer n'importe quelle quantité de dollars peut être très coûteuse, si le taux fixe e^* est élevé. Pour tenir cette promesse le gouvernement doit avoir des quantités de dollars ("réserves") suffisantes et, si nécessaire, être prêt à emprunter sur les marchés internationaux à des taux d'intérêt à court terme élevés. De plus, pour défendre sa monnaie la banque nationale est normalement obligée de maintenir un taux d'intérêt élevé qui porte atteinte à l'activité économique du pays. Il est donc probable que le gouvernement abandonne le taux e^* , si ces coûts deviennent trop lourds. Pour étudier ce problème plus précisément, le modèle suivant est un bon point de départ.³

Le gouvernement a deux actions possibles, g = D ("défendre le taux e^* ") et g = A ("abandonner"). Chaque spéculateur i a deux stratégies, $s_i = 0$ (ne rien faire) et $s_i = 1$ (attaquer la devise avec la stratégie de "short-selling"). Désignons par α la fraction de spéculateurs qui choisissent $s_i = 1$. Si le gouvernement abandonne le taux fixe, le taux de change baisse jusqu'à un "niveau naturel" e, qui est donné par la structure et les perspectives économiques du pays en l'absence d'intervention sur les marchés des devises (la "valeur fondamentale" de la monnaie). e est exogène et son unité de mesure est choisie telle que $e \in [0,1]$ (une normalisation). Pour le gouvernement, la défense de la monnaie est coûteuse, et ces coûts dépendent à la fois de la taille de l'attaque spéculative α et de la valeur fondamentale e. En fait, plus l'attaque est grande et plus la valeur fondamentale est faible, plus il est coûteux pour le gouvernement de défendre la monnaie. Désignons ces coûts par $c(\alpha, e)$.

³Ce modèle est une version simplifée de celui de Morris et Shin (1998).

Finalement, le gouvernement attribue une valeur v > 0 au maintien du taux de change e^* . La fonction d'utilité du gouvernement est donc :

$$u_G(g, \alpha, e) = \begin{cases} v - c(\alpha, e) & \text{si } g = D \\ 0 & \text{si } g = A. \end{cases}$$

Notez que u_G ne dépend des différents s_i que par la valeur agrégée α . Cette formulation de u_G est très simple; un modèle plus riche prendrait en considération par exemple l'impact de e sur $u_G(A,\alpha,e)$. L'utilité du spéculateur i est donnée par :

$$u_{i}(g, s_{i}, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_{i} = 0 \\ e^{*} - e - t & \text{si } s_{i} = 1 \text{ et } g = A \\ -t & \text{si } s_{i} = 1 \text{ et } g = D, \end{cases}$$
(8.3)

où t>0 représente les coûts de transaction du spéculateur, s'il met en oeuvre la stratégie d'arbitrage décrite plus haut. Notez que l'utilité d'un spéculateur ne dépend que de sa propre action et de celle du gouvernement (qui, en revanche, dépend des actions de l'ensemble des spéculateurs).

Pour rendre le problème réaliste, nous faisons les hypothèses quantitatives suivantes.

- **H1** $e^* \ge 1$ (le taux fixe visé par le gouvernement est en tout cas au-dessus du taux du marché),
- **H2** $e^* < 1 + t$ (si les valeurs fondamentales sont très bonnes, le taux fixe ne peut pas être attaqué),
- **H3** c est continu, (strictement) décroissant en e et (strictement) croissant en α ,
- **H4** c(0,0) > v (si les valeurs fondamentales sont misérables, les coûts d'un maintien du taux fixe sont plus élevés que les bénéfices pour toute attaque possible),
- **H5** c(1,1) > v (si tous les spéculateurs attaquent, la défense de la monnaie est trop coûteuse, même si les valeurs fondamentales sont excellentes),
- **H6** v est suffisamment grand par rapport à e^* , t et c(0,0) (la condition exacte sera donnée trois paragraphes plus loin).

Pour compléter la définition du jeu, voici la description de la forme développée (on s'aperçoit vite que dessiner l'arbre de jeu est peu informatif) :

- 1. D'abord, les spéculateurs choisissent simultanément et indépendamment les $s_i \in \{0, 1\}, i = 1..., N$.
- 2. Ayant observé le résultat agrégé α , le gouvernement choisit $g \in \{D, A\}$.

Le jeu ainsi défini est un jeu à information imparfaite : à la première étape, les joueurs qui ont la main choisissent simultanément. Notez que si le gouvernement agissait sans connaître α à la deuxième étape, le jeu serait tout simplement un jeu simultané. De même, on a supposé que tous les paramètres, en particulier la valeur fondamentale e, sont connus par tous les joueurs.

Il est naturel d'analyser ce jeu par récurrence à rebours : le gouvernement choisit son comportement en vue de la gravité de l'attaque des spéculateurs, et les spéculateurs agissent de façon optimale en anticipant le comportement optimal du gouvernement. Pour cette analyse, il est utile de définir les deux valeurs suivantes. Soit \underline{e} la valeur (unique par hypothèse) qui satisfait c(0,e)=v, et soit \overline{e} la valeur (également unique) définie par $\overline{e}=e^*-t$. La figure 8.6 décrit graphiquement la définition de \underline{e} , ainsi que les hypothèses H4 et H5, la figure 8.7 décrit la définition de \overline{e} ainsi que les hypothèses H1 et H2. Si v est suffisamment grand (ceci précise l'hypothèse H6), $\overline{e}>\underline{e}$.

A la dernière étape du jeu, il est clair que le gouvernement ne défendra pas la monnaie si $e < \underline{e}$. Dans ce cas, les coûts de la défense sont plus importants que les gains quelle que soit l'attaque. Pour $e \ge \underline{e}$, la réponse optimale du gouvernement dépend de la taille de l'attaque. En fait, l'hypothèse H3 implique que pour tout $e > \underline{e}$, il y a un seuil unique, disons a(e), tel que le gouvernement choisit g = A si $\alpha > a(e)$ et g = D si $\alpha < a(e)$. A cause de H5, nous avons a(1) < 1. Par définition de \underline{e} nous avons $a(\underline{e}) = 0$. Finalement, à cause de H3, a est continu et strictement croissant (voir figure 8.8). Si nous voulons définir a pour tout e, nous pouvons mettre a(e) = 0 pour $e < \underline{e}$. a(e) est la proportion critique de spéculateurs en fonction de la valeur fondamentale e qui laisse le gouvernement tout juste indifférent entre A et D.

⁴Formellement, a est défini par c(a(e), e) = v. Donc si c est différentiable, $a'(e) = -c_e/c_\alpha > 0$.

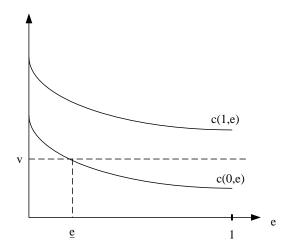


Fig. 8.6 – La détermination de \underline{e} .

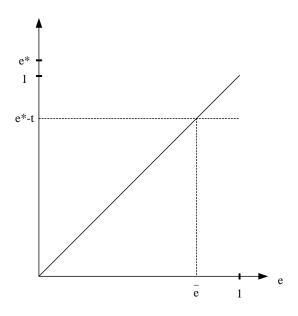


Fig. 8.7 – La détermination de \overline{e} .

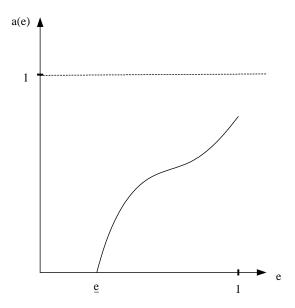


Fig. 8.8 – La fonction a.

A la première étape du jeu, la décision des spéculateurs prend en considération la décision du gouvernement à la deuxième étape, donnée par la fonction a(e). Nous avons donc un jeu sous forme normale entre les spéculateurs, dont la fonction d'utilité peut être exprimée par la fonction w_i suivante, dérivée de la fonction u_i en (8.3):

$$w_i(s_i, \alpha, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i = 0 \\ e^* - e - t & \text{si } s_i = 1 \text{ et soit } \alpha > a(e) \text{ soit } e < \underline{e} \\ -t & \text{si } s_i = 1 \text{ et } \alpha < a(e). \end{cases}$$

Pour simplifier, ignorons ici pour l'instant le cas d'égalité $\alpha = a(e)$. Clairement, si $e > \overline{e}$, une attaque n'est jamais profitable, même si tout le marché attaque simultanément. Plus précisément, si $e > \overline{e}$, $s_i = 1$ est strictement dominé par $s_i = 0$. De plus, si $e < \underline{e}$, une attaque, même individuelle, réussit toujours, et elle rapporte⁵

$$e^* - e - t > e^* - \underline{e} - t > e^* - \overline{e} - t = 0.$$

Donc pour $e < \underline{e}$, $s_i = 0$ est strictement dominé par $s_i = 1$. Parce que le nombre de spéculateurs est fini, la stratégie $s_i = 0$ est aussi strictement

⁵Notez que cette inégalité utilise l'hypothèse H6.

dominée dans le cas $e=\underline{e}$: attaquer seul implique $\alpha>0$ (le spéculateur individuel a un impact), donc l'attaque réussit et rapporte $e^*-e-t>0$ sans égard à ce que les autres spéculateurs font.

Pour les valeurs intermédiaires, $e \in (\underline{e}, \overline{e}]$, ni $s_i = 0$ ni $s_i = 1$ sont strictement dominés. Pour trouver les équilibres de Nash dans cette situation, supposons qu'une fraction α de spéculateurs attaquent à l'équilibre. Si $e < \overline{e}$, nous avons $e^* - e - t > 0$. Donc si $\alpha > a(e)$, il faut que $\alpha = 1$, si $\alpha < a(e)$, il faut que $\alpha = 0$ (le calcul de rentabilité est le même pour tout spéculateur). Inversement, il est facile de vérifier que ces deux combinaisons de stratégies soit $s_i = 0$ pour tout i, soit $s_i = 1$ pour tout i - sont des équilibres pour tout $e \in (\underline{e}, \overline{e})$. Ces deux combinaisons sont des équilibres aussi dans le cas $e = \overline{e}$, mais dans ce cas aussi tout comportement des spéculateurs tel que $\alpha > a(\overline{e})$ est un équilibre. Cela termine la description des équilibres en stratégies pures.

Un dernier type d'équilibre apparaît, pour $e \in (\underline{e}, \overline{e})$, si nous considérons la possibilité $\alpha = a(e)$ (si a(e)N est un nombre entier). Dans ce cas, le gouvernement est indifférent entre A et D, et nous pouvons envisager des stratégies mixtes. Soit λ la probabilité d'abandonner le taux de change dans ce cas. L'utilité espérée d'un spéculateur qui choisit $s_i = 1$ face à ce comportement du gouvernement est donnée par :

$$\lambda(e^* - e - t) - (1 - \lambda)t$$

$$= \lambda(e^* - e) - t.$$

Donc, si $\lambda = t/(e^* - e)$, tout spéculateur est indifférent entre $s_i = 0$ et $s_i = 1$, et nous pouvons poser $\alpha = a(e)$, ce qui justifie la décision du gouvernement.⁶

Pour récapituler nos résultats, nous avons identifié trois régions de la valeur fondamentale $e \in [0,1]$. La première est l'intervalle $[0,\underline{e}]$, où l'économie est tellement faible qu'il y a un équilibre parfait unique (en stratégies strictement dominantes dans le jeu réduit entre spéculateurs), où la devise s'effondre. Dans la deuxième région, $(\overline{e},1]$, l'équilibre parfait unique prédit la stabilité de la devise (de nouveau en stratégies strictement dominantes dans le jeu réduit entre spéculateurs). Finalement, dans la troisième région $(\underline{e},\overline{e})$ (ignorant le cas $e=\overline{e}$ et les équilibres mixtes), la théorie prédit un "effet de troupeau" : à l'équilibre parfait, les spéculateurs vont tous dans la même direction, mais la direction est indéterminée.

⁶Nous avons $\lambda > 0$ car $e^* - e > 0$, et nous avons $\lambda < 1$ car $e < \overline{e} = e^* - t$.

8.4. PROBLÈMES 155

8.4 Problèmes

Question 8.1:

Nous considérons ici le problème des subventions aux entreprises dans un contexte international. En fait, un des arguments les plus souvent entendus pour justifier les subventions est que sans subventions l'entreprise ou la branche en question serait la victime de la concurrence internationale.

Dans le modèle, il y a deux pays, i=1,2, chacun avec son gouvernement. On considère le marché d'un bien homogène donné. Le marché du bien dans le pays i est représenté par sa fonction de demande :

$$p_i = a_i - Q_i \quad (Q_i < a_i)$$

Les producteurs dans le pays i sont décrits par une seule fonction de production (donc, pour simplifier nous supposons que les producteurs dans un pays agissent comme un seul producteur, appelé le "producteur i"). Nous supposons des coûts marginaux constants, c_i pour le producteur i, ainsi que l'absence de coûts fixes.

Les producteurs dans les deux pays produisent pour le marché de leur propre pays et pour l'exportation. Soit h_i la production de i pour le marché i ("home production") et e_i la production de i pour l'autre pays ("exports"). Le coût total du producteur i est donc

$$C_i(h_i, e_i) = c_i(h_i + e_i)$$

et la quantité totale offerte dans pays i est $Q_i = h_i + e_j, j \neq i$.

Dans chaque pays i, le gouvernement subventionne la production du producteur domestique à un taux $s_i \in [0,1]$. Ceci veut dire que pour produire $h_i + e_i$, le producteur i supporte un coût de $(1 - s_i)c_i(h_i + e_i)$, tandis que le gouvernement prend à sa charge le reste du coût, soit $s_ic_i(h_i + e_i)$.

La concurrence entre producteurs est à la Cournot : les deux producteurs choisissent les quantités qu'ils veulent vendre; ensuite les prix p_1 et p_2 sur les marchés nationaux s'ajustent de manière à ce que tout soit vendu. Il n'y a pas de droits de douane.

Nous considérons le jeu dynamique suivant entre producteurs et gouvernements :

1. Les deux gouvernements 1 et 2 déterminent les taux de subventions, s_1 et s_2 , de leur pays respectifs.

- 2. Les producteurs des deux pays déterminent leur production, (h_1, e_1) et (h_2, e_2) .
- 3. Les marchés dans les deux pays s'équilibrent et les consommateurs consomment.

On suppose que le producteur i est neutre au risque et cherche à maximiser son profit :

$$\pi_i = \pi_i(s_1, s_2, h_1, e_1, h_2, e_2).$$

Le gouvernement i est supposé considérer seulement les intérêts des entreprises et ses propres coûts. Sa fonction d'utilité est donc :

$$W_i = \pi_i - s_i c_i (h_i + e_i).$$

- 1. Dessinez l'arbre de jeu.
- 2. Déterminez l'équilibre parfait du jeu.
- 3. Supposez maintenant que les gouvernements peuvent s'engager, dans un traité international, à fixer le niveaux des subventions à certaines valeurs, \overline{s}_1 et \overline{s}_2 . Quelles valeurs vont-ils choisir? Comparez avec votre réponse à la partie 2.

Question 8.2:

On considère le jeu suivant à deux étapes entre deux joueurs. D'abord le joueur 1 peut brûler 10 francs (de sa propre poche). Le joueur 2 est informé de l'action du joueur 1. Ensuite, les deux joueurs choisissent simultanément (mais indépendamment), soit de jouer "B", soit "S". Les paiements du jeu sous forme normale de la deuxième étape (qui ne comprennent pas l'action de la première étape) sont donnés par la matrice suivante (en francs) :

		Joueur 2			
_		В	S		
	В	30	0		
	ט	10	0		
1	\mathbf{S}	0	10		
Ι.		0	30		

- Joueur 1 S
- 1. Dessinez l'arbre de jeu.
- 2. Donnez la forme normale du jeu.
- 3. Déterminez les équilibres parfaits du jeu.

8.4. PROBLÈMES 157

- 4. Déterminez tous les équilibres de Nash.
- 5. En utilisant la forme normale, déterminez le jeu réduit par élimination successive des stratégies faiblement dominées. Commentez.

Question 8.3:

Un tableau est mis à l'enchère avec n=3 participants potentiels. L'enchère est une enchère au premier prix et chaque participant doit payer un prix d'entrée de 1 s'il veut participer à l'enchère (s'il ne paie pas, il ne participe pas). Les évaluations des trois personnes pour le tableau sont $v_1=100$, $v_2=200$ et $v_3=250$ et ceci est connu des joueurs avant la décision de participer. Les décisions de participer se font simultanément et sont observée ensuite par les autres joueurs. Les joueurs décident leurs mises après cette observation. Les enchères doivent être des nombres entiers positifs.

- 1. Dessinez l'arbre du jeu pour le cas de deux joueurs (des joueurs 1 et 2).
- 2. Pour n=3, déterminez les stratégies strictement dominées de tout joueur.
- 3. Déterminez les stratégies faiblement dominées de tout joueur.
- 4. Trouvez les équilibres parfaits du jeu. Dans ce cadre, l'idée de demander un prix d'entrée est-elle bonne?
- 5. Comment votre réponse change-t-elle si vous considérez seulement des équilibres parfaits en stratégies non-faiblement dominées?
- 6. Supposez maintenant qu'il n'y a que deux joueurs et qu'au moment où les deux joueurs doivent décider s'ils veulent participer à l'enchère, ils ne connaissent pas leurs évaluations. Chacun sait seulement que sa évaluations sera soit 50, soit 100 avec probabilité égale de 0.5 (et que ces réalisations seront indépendants les uns des autres). Dès qu'un joueur a payé son prix d'entrée il voit le tableau et connaît son évaluation, ainsi que celle de l'autre joueur. Discutez la structure de ce jeu (en particulier, est-ce possible de dessiner un arbre de jeu? Si non pourquoi, si oui quelle est l'arbre?). En supposant que les joueurs sont neutres au risque, trouvez les équilibres parfaits du jeu. Que pensez-vous maintenant de l'idée de demander un prix d'entrée?

Question 8.4:

Les actions d'une société anonyme sont répandues dans un groupe d'actionnaires tel que chaque actionnaire ne détient qu'une seule action. Les

actions sont librement transmissibles, et aucune restriction de droit de vote n'est imposée. Sous le management en place, la valeur de l'action est égale à k. Cependant, si la compagnie est gérée par un autre management (le "raider"), ce nouveau management peut élever la valeur de l'action à v > k.

Considérons le jeu à deux étapes suivants. D'abord, le raider décide s'il veut faire une offre publique d'achat conditionnelle (si au moins la moitié des actionnaires sont prêts à vendre leurs actions, le raider les achète et réorganise la compagnie, si moins que la moitié d'actions sont offertes, le raider retire l'offre), ou s'il ne fait pas d'offre. S'il fait l'offre il choisit la valeur b, qu'il offre par action. Ensuite, les actionnaires décident indépendamment et simultanément s'ils veulent accepter l'offre ou non. Les coûts directs de l'offre pour le raider (préparation du prospectus, travail administratif etc.) sont de c > 0. Nous supposons qu'il y a "beaucoup" de petits actionnaires et nous modélisons cela par l'hypothèse que l'ensemble des actionnaires est l'intervalle [0,1] (où le poids d'un ensemble d'actionnaires $[a,b] \subset [0,1]$ est b-a).

- 1. Décrivez la situation par un jeu sous forme développée (ensemble de joueurs, stratégies, fonctions d'utilité).
- 2. Trouvez les équilibres parfaits du jeu.
- 3. Discutez votre résultat.
- 4. Supposez maintenant que le raider peut acheter anonymement des actions de l'entreprise à la bourse au prix de k jusqu'à une quantité B < 0.5 (dans la plupart des pays on a B = .05). S'il achète plus de B de la compagnie il doit annoncer son identité. Refaites l'analyse de la partie 2 sous l'hypothèse que le raider fait l'offre ayant acheté une partie B des actions de la compagnie de cette façon. Interprétez.

Chapitre 9

Jeux répétés

Lors de notre discussion sur les jeux statiques durant la première partie du cours, nous avons dû constater que parfois le cadre d'analyse était trop restreint et les résultats obtenus pas très convaincants. Dans le dilemme du prisonnier, par exemple, nous avons obtenu l'issue non-coopérative comme unique prédiction de la théorie (Nash, dominance, prudence, etc.), bien que nous avions constaté qu'en réalité il y a de temps en temps des tendances à la coopération. En fait, dans la simulation du jeu dans l'auditoire, environ 40 pour cent des participants ont choisi le comportement coopératif, un choix représentatif de ce que l'on trouve dans d'autres groupes expérimentaux.

Il y a sans doute plusieurs explications à ce comportement spécifique, parmi lesquelles la rationalité bornée des participants, mais une telle explication semble être particulièrement pertinente. Celle-ci porte sur le fait que la coopération est quelque chose de "fondamental" à notre façon d'agir, car nous sommes habitués à voir la plupart des interactions stratégiques comme des interactions répétées dans lesquelles il est profitable d'agir de façon réciproque. Sous cette hypothèse, le comportement coopératif dans le dilemme du prisonnier statique n'est pas vraiment une erreur, parce que "l'habitude" pousserait les joueurs à s'attendre à une réponse coopérative. De plus, des répétitions anonymes du jeu devraient vite apprendre aux participants que cette habitude est mal fondée dans la situation donnée et donc induire un comportement moins coopératif - c'est exactement ce que montrent les expériences semblables à celle reportée au chapitre 1.

Cette observation indique qu'afin de comprendre vraiment le dilemme du prisonnier dans la réalité, il nous faut étudier le cadre plus large de l'interaction répétée. Une observation similaire concerne la modélisation de la concurrence par le modèle statique, soit de Cournot ou soit de Bertrand. En fait, on obtient dans ce jeu la prédiction d'une concurrence relativement sévère bien qu'en réalité, on observe souvent une coopération tacite entre les soi-disant concurrents (accords des prix, cartels, etc).

L'aspect qui nous importe est le fait que tous ces types de comportements plutôt coopératifs ont un aspect dynamique, ce que nous n'avons pas pu décrire avec les seuls outils du Chapitre 1. Nous avons maintenant développé les concepts qui nous permettent de mieux comprendre cet aspect dynamique. Nous pouvons donc nous demander quelles seront les caractéristiques de ces interactions si elles se situent dans un contexte récurrent.

Notre démarche sera de considérer un jeu sous forme normale à n joueurs, G, et de supposer que l'interaction représentée par G est répétée T fois, $2 \le T \le \infty$. On suppose également qu'à l'issue de chaque répétition les joueurs observent l'issue de cette période (donc les actions prises par les autres joueurs). Finalement, on suppose que le paiement de tout joueur dans le jeu répété est égal, soit à la somme des paiements obtenus à chaque période (si $T < \infty$), soit à la somme des paiements de chaque période actualisés (si les coûts du temps sont jugés importants).

Cette description définit un jeu dynamique que nous appelons G^T . La question principale que nous nous posons dans ce chapitre est celle de la relation entre un comportement "optimal" (par exemple, Nash) dans G et dans G^T . En particulier, nous tâcherons d'éclaircir des réponses aux questions suivantes :

- 1. Un comportement d'équilibre dans G est-il encore un comportement d'équilibre dans G^T ?
- 2. Existe-t-il des comportements dans G qui ne sont pas possibles à l'équilibre dans G, mais qui sont possibles à l'équilibre dans G^T ?
- 3. Quels sont les impacts du nombre de répétitions et du taux d'actualisation sur les équilibres de G^T ?
- 4. Etant donné qu'avec le concept de G^T le temps est modélisé explicitement, quelle est la différence entre équilibres et équilibres parfaits de G^T ?

Il y a toute une branche de la théorie des jeux qui a étudié ces questions et bien d'autres concernant les jeux répétés. Ici nous nous limitons à donner quelques réponses de base et à illustrer la théorie à l'aide de certains exemples, tel que le dilemme du prisonnier.

161

9.1 Stratégies et équilibres dans des jeux répétés

Nous commençons par l'exemple du dilemme du prisonnier, qui est pris comme base G. Dans ce cours nous l'avons décrit par le jeu suivant :

		2	
		NC	C
1	NC	1,1	5,0
	C	0,5	4,4

Supposons d'abord que le jeu soit répété T=2 fois, avec le facteur d'actualisation $\delta=1$. L'arbre de ce jeu est donné à la figure 9.1.

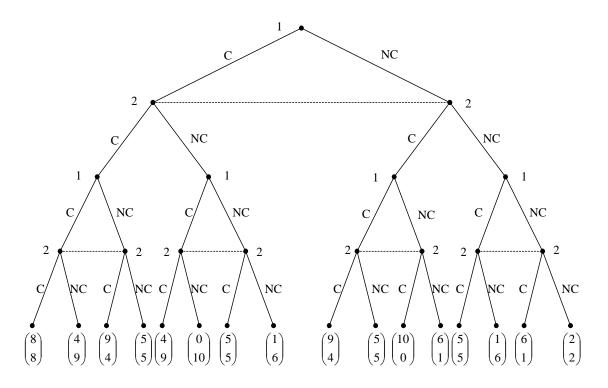


Fig. 9.1 – Le dilemme du prisonnier répété deux fois

En quoi consiste une stratégie de ce jeu? Le joueur 1, par exemple, doit faire deux choix, d'abord quelle action choisir à la première période, et ensuite comment réagir au choix du joueur 2. Une stratégie du joueur 1 est donc donnée par (x_1^1, s_1^2) où $x_1^1 \in \{NC, C\}$ et $s_1^2 : \{NC, C\} \rightarrow \{NC, C\}$ (dans ce chapitre, les indices désignent le joueur et les exposants la période du jeu). Pour tout choix x_1^1 , il y a 4 stratégies de continuation s_1^2 possibles : soit répondre toujours avec NC, soit répondre toujours avec C, soit répondre à C avec C et à NC avec NC, soit répondre à C avec C et à C avec C. Le joueur 1 (et 2 également) a donc C avec C et à stratégies à disposition.

Considérons maintenant le jeu G^3 . A la première et deuxième période les stratégies sont les mêmes qu'en G^2 . A la troisième période, le joueur 1 se retrouve à nouveau face à deux choix possibles du joueur 2 (à la deuxième période), et peut de nouveau répondre à ces choix par C ou NC. Cela donne donc $2 \times 2^2 \times 2^2 = 32$ stratégies pour chaque joueur dans G^3 .

Avec un nombre arbitraire de répétitions, une stratégie s_i d'un joueur i dans G^T associe un choix $\in \{C, NC\}$ à toute histoire observée (x_1^1, x_2^1) , $(x_1^2, x_2^2), ..., (x_1^{t-1}, x_2^{t-1}), t = 1, ..., T$. Par induction (ou en continuant l'argument ci-dessus jusqu'au nombre de périodes désiré) il est facile de voir que le nombre de stratégies d'un joueur dans G^T est de $2 \times (2^2)^{T-1} = 2^{2T-1}$.

Remarque : Pour un jeu 2×2 répété 10 fois, le nombre de stratégies est égal à $2^{19} = 524288$.

Le recours à la forme normale de G^T est ainsi très pénible numériquement, voire impossible. Dès lors, il convient de raisonner directement sur la structure temporelle du jeu et poser des questions plus intuitives. Pour alimenter l'intuition, nous considérons l'exemple G^2 de façon plus détaillée et posons la question suivant : lesquelles des 64 combinaisons (s_1, s_2) possibles sont des équilibres?

On s'aperçoit vite qu'une stratégie d'équilibre ne peut pas choisir C à la deuxième période à l'équilibre (donc contenir une promesse de coopération

 $^{^{1}}$ Le lecteur ou la lectrice attentive notera que cette énumération est en contradiction avec la définition même de ce qu'est une stratégie ("attribuer un choix à tout noeud de décision du joueur"). En fait, nous supposons que le joueur ignore les ensembles d'information qui sont rendus impossibles à cause de son propre choix (par exemple, si le joueur 1 choisit C à la première étape, nous supposons qu'il ne prévoit rien pour le noeud (NC,C)). Dans la plupart des cas, ceci est simplement raisonnable. Si nous voulons permettre des situations où un joueur est surpris par sa propre action, mais prévoit ces surprises, le nombre de stratégies devient 2^{4T-3} .

à la deuxième période qui soit tenue). L'argument n'est pas un argument de perfection, mais simplement d'optimalité : étant donné la stratégie de l'autre joueur, à la deuxième période NC rapporte strictement plus que C et ne coûte rien. Donc à l'équilibre le comportement de tout joueur à la deuxième période est NC. Cela implique immédiatement que les joueurs ne coopèrent pas à la première période non plus $(x_i^1=NC, \text{ pour }i=1,2)$, car ils savent qu'ils ne peuvent rien gagner avec $x_i^1=C,$ ni à la première période (parce que C est dominé par NC), ni à la deuxième (car le choix de l'autre à cet période sera NC de toute façon). Finalement, on vérifie que la "stratégie de la promesse vide", $x_i^1=NC,\,s_i^2(C)=C,\,s_i^2(NC)=NC$ n'est pas possible à l'équilibre (car nous savons que nécessairement tout joueur doit choisir NC à la première période, ce qui n'est pas compatible avec la stratégie proposée : pour l'autre joueur la déviation de NC à C à la première période serait profitable en réponse). Donc le seul équilibre de G^2 est $x_i^1=NC,\,s_i^2(x_j^1)\equiv NC$, $i=1,2.^2$

Nous pouvons généraliser ces raisonnements sans autre au cas plus général. Soit $G = (\mathcal{N}, X_1, ..., X_n, u_1, ..., u_n)$ un jeu statique sous forme normale quelconque et $2 \leq T \leq \infty$. Pour décrire l'interaction répétée, les définitions suivantes sont utiles. Pour simplifier la présentation de cette section, nous nous limitons aux stratégies pures.

Définition : Une histoire jusqu'à t (t-histoire) dans un jeu répété G^T est une séquence $h^t = (x^1, x^2, ..., x^{t-1}) \in X^{t-1}$. Une stratégie (pure) d'un joueur i dans G^T est une séquence de fonctions $s_i = (s_i^1, ..., s_i^T), s_i^t : X^{t-1} \to X_i$ (où $s_i^1 \in X_i$ par convention). Pour toute combinaison de stratégies $s = (s_1, ..., s_n)$, le déroulement du jeu $(s^1, s^2(s^1), s^3(s^1, s^2(s^1)), ...)$ est appelé la trajectoire induite par s.

Ces définitions reprennent les notions que nous avons utilisées dans le cadre du dilemme du prisonnier plus haut. En fonction du contexte étudié, il y a maintenant plusieurs façons de définir les fonctions de paiement du jeu répété. Si le nombre de répétitions est fini, on considère normalement le critère

$$U_i(s_1, ...s_n) = \frac{1}{1 + \delta_i + ... + \delta_i^T} \sum_{t=0}^T \delta_i^t u_i(x^t)$$
 (9.1)

 $^{^2}$ Si le paiement pour l'issue (C, NC) pour le joueur 1 et pour (NC, C) pour le joueur 2 est suffisamment négatif (au lieu de 0), l'équilibre de la "promesse vide" existe. Cet équilibre n'est pas parfait. A l'équilibre, comme on l'a vu, les comportements sont (NC, NC) aux deux périodes.

où $(x^1, ... x^T)$ est la trajectoire induite par $(s_1, ..., s_n)$ et $0 < \delta_i \le 1$ est le facteur d'actualisation du joueur i ($\delta_i = 1$ correspond à la simple moyenne des paiements par période). La fraction devant la somme en (9.1) est introduite pour normaliser les paiements dans le jeu répété au niveau du jeu statique : si, par exemple, un joueur obtient un paiement constant de c par période $(u_i(x^t) = c$ pour tout t), le paiement total actualisé dans (9.1) est exactement c (en particulier, ceci permet de comparer directement des résultats obtenus dans des répétitions de différentes longueurs pour le même jeu de base G).

Normalement, les résultats obtenus pour le cas fini ne dépendent pas de la forme de la fonction de paiement (et nous spécifions cette forme seulement si elle importe). Par contre, cette forme entre en considération pour le cas infini. Si $T=\infty$, nous pouvons considérer la somme infinie actualisée :

$$U_i(s_1, ...s_n) = (1 - \delta_i) \sum_{t=0}^{\infty} \delta_i^t u_i(x^t)$$
 (9.2)

si le temps qui défile est considéré comme important à court terme. Notons que la formulation (9.2) est la même que la formule (9.1), car

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{1 + \delta_i + \dots + \delta_i^T} = 1 - \delta_i$$

Par contre, si le court terme n'importe pas et le seul intérêt se porte sur le long terme (ce qui est souvent le cas, par exemple, en économie de l'environnement), on travaille souvent avec la "limite des moyennes",

$$U_i(s_1, ...s_n) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} u_i(x^t)$$
 (9.3)

Le lecteur peut se convaincre qu'avec la limite des moyennes, un nombre fini de périodes n'importe pas du tout pour l'évaluation d'une trajectoire - ce critère est vraiment un critère de long terme.³

Nous pouvons maintenant généraliser les idées de notre discussion du dilemme du prisonnier.

Proposition 9.1 : Si $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ est un équilibre de Nash dans G, $s_i^t(h^t) = x_i^*$ pour tout i, t et h^t est un équilibre de Nash dans G^T .

³Pour être plus précis, il faut noter que la limite dans (9.3) n'existe pas toujours. Dans ce cas, il faut modifier le critère, et on remplace souvent la limite par la "limite inférieure", donc le point d'accumulation des valeurs de la série la plus petite (celle-ci existe toujours).

La démonstration de cette proposition est évidente, car les stratégies à utiliser dans le jeu G^T sont simplement des fonctions constantes. A chaque période, tout joueur i joue x_i^* aveuglément - sans regarder ce qui s'est passé aux périodes précédentes.

En fait, nous pouvons démontrer davantage:

Proposition 9.2 : Si $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ est un équilibre de Nash dans G, les stratégies $s_i^t(h^t) = x_i^*$ pour tout i, t et h^t constituent un équilibre parfait dans G^T

Démonstration : Considérons un sous-jeu arbitraire de G^T , qui commence à $t_0 \leq T$. Si le joueur i envisage une déviation de x_i^* à n'importe quelle période $t \geq t_0$, quel en serait le bénéfice? A la période t, le bénéfice est certainement nul ou négatif, parce que x^* est un équilibre de G. Et dans les périodes ultérieures (à t' > t), il en est de même, car dans ces périodes son comportement changé ne change rien, parce que les autres joueurs joueront aveuglément x_{-i}^* à chaque période.

Si le jeu G a plusieurs équilibres, nous pouvons généraliser cet argument sans autre.

Proposition 9.3 : Soient x^* , y^* , z^* , ... des équilibres de G. Pour toute partition de l'horizon T = (1, 2, ..., T) dans des sous-ensembles disjoints T_1 , T_2 , ... la règle que les joueurs jouent x^* dans les périodes de T_1 , y^* dans les périodes de T_2 , etc. définit un équilibre parfait dans G^T .

Intuitivement, cette proposition est utile quand il s'agit de construire des punitions et des rémunérations dans un jeu répété. Supposons, par exemple, qu'un jeu à deux joueurs a deux équilibres, l'un favorable au joueur 1, l'autre favorable au joueur 2. Si ce jeu est répété, un comportement collectif intéressant peut être l'accord suivant : aux périodes paires le premier équilibre est joué, et aux périodes impaires les joueurs optent pour le deuxième équilibre. D'après la proposition ci-dessus, ces stratégies forment un équilibre parfait.⁴

Avec les trois propositions précédentes, nous avons "récupéré" le comportement d'équilibre de G dans le jeu G^T , ce qui donne une réponse à la

 $^{^4}$ Il faut souligner que, strictement parlé, les propositions 3.5.2 et 3.5.3 ne sont valables que si le jeu G est statique. Si G a une structure dynamique lui-aussi (comme par exemple c'est le cas dans le "paradoxe de la chaîne des supermarchés" discuté aux exercices), et si l'équilibre x^* de G choisi n'est pas parfait, la répétition de x^* ne peut clairement pas être parfaite non plus.

première de nos quatre questions posées plus haut. En fait, l'ensemble des comportements possibles à l'équilibre peut seulement s'accroître si on répète un jeu - tout ce qui est équilibre dans le jeu de base reste équilibre dans le jeu répété, et les combinaisons de ces équilibres sont possibles.

Nous pouvons aller même plus loin:

Proposition 9.4 : Si $T < \infty$ et x^* est le seul équilibre de Nash dans G, G^T a un seul équilibre parfait et ceci consiste en la répétition T-fois de x^* , sans égard à l'histoire du jeu.

Démonstration : A la période T, x^* est le seul équilibre pour le sous-jeu qui commence à ce moment. A la période T-1, on remplace le sous-jeu de la période T par les paiements uniques correspondants, ce qui équivaut à additionner ces paiements à tous les paiements possibles dans G. Il en résulte que x^* est le seul équilibre du jeu obtenu ainsi. Etc.

Dans les répétitions finies de jeux avec un seul équilibre, nous avons donc trouvé une réponse simple et malheureusement décevante aux questions 1 et 2 : le comportement d'équilibre est le même dans le jeux de base et dans le jeu répété, pour n'importe quel nombre de répétitions.

9.2 Au-delà des jeux statiques

Les résultats obtenus à la dernière section ne sont guère satisfaisants. Un jeu répété est-il vraiment rien d'autre qu'une collection de comportements statiques? Intuitivement, même dans le dilemme du prisonnier la coopération ne semble pas déraisonnable si les participants envisagent une relation à long terme. En fait, qu'en est-il de l'argument classique qu'une main lave une autre, comme disaient déjà les Romains?

L'analyse de la section précédente y fournit une première réponse. Comme l'indique la proposition 9.4, afin de développer une vue plus intéressante sur la possibilité de l'émergence de nouveaux types de comportements dans les interactions répétées, il faut étudier des jeux qui sont soit infiniment répétés, soit admettent plus d'un équilibre. Nous nous penchons d'abord sur la deuxième de ces alternatives et étudions un exemple qui contient déjà la plupart de la réponse générale.

Dans cet exemple, le jeu de base G est donné par la matrice de paiements

167

suivante:

			Joueur 2	
		NC	\mathbf{C}	\mathbf{Z}
	NC	1	5	0
		1	0	0
Joueur 1		0	4	1
Joueur 1		5	4	1
		0	1	3
		0	1	3

Ce jeu 3×3 entre deux joueurs peut être considéré comme une "extension" du dilemme du prisonnier par une stratégie supplémentaire "Z". Le jeu a deux équilibres de Nash, (NC,NC) et (Z,Z). L'équilibre (Z,Z) est préféré à l'équilibre (NC,NC) par les deux joueurs, bien que les paiements à (Z,Z) soient pires qu'à l'issue coopérative (C,C).

Considérons le jeu deux fois répété, G^2 , avec un facteur d'actualisation $\delta=1$ pour les deux joueurs. La proposition 9.3 nous permet d'identifier immédiatement les 4 issues d'équilibre parfait suivantes : ((NC,NC),(NC,NC)), ((NC,NC),(Z,Z)), ((Z,Z),(NC,NC)), ((Z,Z),(Z,Z)). En fait, jouer aveuglement un équilibre de Nash à chaque répétition constitue clairement un équilibre parfait du jeu répété. Mais G^2 a un autre équilibre parfait. Pour comprendre cet équilibre, notons que les joueurs préfèrent l'issue (C,C) même à l'issue (Z,Z), mais que cette issue n'est pas stable par rapport aux incitations individuelles dans le jeu non-répété. Dans le jeu répété la situation est différente, car les joueurs ont une menace crédible pour prévenir une telle déviation à la première étape : le choix d'équilibre à la deuxième étape. Cette menace est puissante parce que la différence entre les paiements dans les deux équilibres est substantielle (3 contre 1), et elle est crédible parce que les deux comportements résultent d'un équilibre dans le jeu statique.

Formellement, les stratégies suivantes pour i=1,2 constituent un équilibre parfait dans \mathbb{G}^2 :

$$\begin{array}{rcl} x_i^1 & = & C \\ \\ s_i^2(x^1) & = & \left\{ \begin{array}{ll} Z & \text{si } x^1 = (C,C) \\ NC & \text{si non} \end{array} \right. \end{array}$$

Ces stratégies récompensent un comportement coopératif avec le "bon" équilibre à la deuxième période, et elles punissent un comportement non-coopératif avec le "mauvais" équilibre. Confronté à cette stratégie, tout joueur

a intérêt à ne pas dévier : à la deuxième période le comportement correspond à un équilibre de Nash du jeu statique, et à la première période l'action d'équilibre lui rapporte 4+3=7, tandis qu'une déviation pour le gain à court terme lui rapporte 5+1<7.

L'exemple montre que les équilibres parfaits dans G^T ne consistent pas nécessairement à répéter simplement les équilibres du jeu de base, si G a plus qu'un équilibre. Même si ce-ci n'est qu'un exemple, sa logique est générale et il est utile de noter cette possibilité formellement :

Remarque : Si G a plus d'un équilibre, G^T peut avoir des équilibres, et même des équilibres parfaits, dans lesquels les joueurs choisissent des actions qui ne sont pas des actions d'équilibre de G.

Cet exemple donne donc une première réponse à la question 3 posée au début de ce chapitre : si on répète un jeux avec plusieurs équilibres, un comportement "réciproque" crédible peut émerger qui va au-delà de la simple logique de la maximisation à court terme.

Passons maintenant aux jeux infiniment répétés. Pour mieux comprendre quelles sont les possibilités de coopération dans ces jeux, il faut surtout comprendre quelles sont les possibilités à la disposition des joueurs pour punir ou pour rémunérer l'adversaire dans de tels jeux. L'observation fondamentale dans ce contexte est double et similaire à l'observation faite à l'exemple du jeu G^2 ci-dessus : d'une part toute coopération doit être soutenue par des menaces de punition ou des promesses de rémunération, et d'autre part, ces menaces doivent être crédibles dans le sens que leur exécution soit un comportement d'équilibre. Cette deuxième remarque explique pourquoi seulement les répétitions infinies et les répétitions des jeux avec plusieurs équilibres sont susceptibles de générer des comportements plus riches : les équilibres futurs dans ces deux types d'interactions sont "potentiellement plus variés".

Pour la même raison (le besoin de comportements plus variés) nous revenons au cadre plus général des stratégies mixtes.

Rappel : Une stratégie mixte du joueur i dans un jeu sous forme normale G est une distribution de probabilité P_i sur son ensemble de stratégies pures X_i . Donc, si $X_i = \{x_i^1, ..., x_i^{m_i}\}$, une stratégie mixte est la donnée de m_i nombres $p_i^1, ..., p_i^{m_i}$, tels que $0 \le p_i^k \le 1$ pour tout k et $\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k = 1$. $P = (P_1, ..., P_n)$ décrit la distribution de toutes les issues du jeu si les joueurs se comportent d'apès les distributions individuelles P_i . Comme d'habitude,

169

 $P_{-i} = (P_1, ..., P_{i-1}, P_{i+1}, ..., P_n)$ dénote le comportement (probabiliste) de tous les joueurs sauf i.

Soit \mathcal{P}_i l'ensemble de toutes les stratégies mixtes du joueur i dans le jeu G. Une stratégie mixte d'un joueur i dans le jeu répété G^{∞} est une séquence infinie de fonctions $\sigma_i = (\sigma_i^1, ...), \ \sigma_i^t : X^{t-1} \to \mathcal{P}_i$ (où $\sigma_i^1 \in \mathcal{P}_i$ par convention). Cette définition implique que les joueurs ne peuvent pas observer les stratégies mixtes utilisées dans le passé, mais seulement les trajectoires des actions réalisées.

Nous reprenons la terminologie de (9.2) et (9.3) de la manière évidente comme suit :

$$U_{i}(\sigma_{1},...\sigma_{n}) = (1 - \delta_{i}) \sum_{t=0}^{\infty} \delta_{i}^{t} E_{\sigma(X^{t-1})} u_{i}(x^{t})$$
 (9.4)

$$U_i(\sigma_1, ...\sigma_n) = \lim_{T \to \infty} \inf \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T E_{\sigma(X^{t-1})} u_i(x^t)$$
 (9.5)

où $E_{\sigma(X^{t-1})}$ dénote l'espérance par rapport à la distribution $\sigma(X^{t-1})$.

Pour rendre l'analyse de la punition dans des jeux répétés plus précise, il convient de revenir sur la notion des stratégies dites minimax, introduites au chapitre 3.

Rappel : Une combinaison de stratégies mixtes P_{-i} de tous les joueurs sauf i dans un jeu sous forme normale G est appelée "minimax contre i", si P_{-i} est une solution du problème

$$\min_{P_{-i}} \max_{P_i} E_{P_{-i}} E_{P_i} u_i(x) \tag{9.6}$$

La valeur

$$\underline{v}_i = \min_{P_{-i}} \max_{P_i} E_{P_{-i}} E_{P_i} u_i(x) \tag{9.7}$$

est appelé la "valeur minimax" du joueur i.5

 \underline{v}_i est la plus grande punition qui peut être infligée au joueur i, s'il comprend le comportement des autres joueurs. En particulier, il est impossible

 $^{^5}$ Pour que cette valeur soit toujours bien définie il faut que G soit un jeu fini, ce que nous supposons ici et dans la suite. Autrement, il faut remplacer les min et les max par des inf et des sup.

de forcer un joueur i d'accepter un paiement (espéré) $v_i < \underline{v}_i$ dans le jeu G. Pour être plus précis :

Remarque : Si $P^* = (P_1^*, ..., P_n^*)$ est un equilibre de Nash du jeu G, $E_{P^*}u_i(x) \geq \underline{v}_i$.

La raison en est simple : la stratégie P_i en (9.7) est une meilleure réponse a P_{-1} . Donc,

$$E_{P^*}u_i(x) = E_{P^*_{-i}}E_{P^*_i}u_i(x) = E_{P^*_{-i}}\max_{P_i}E_{P_i}u_i(x) \ge \min_{P_{-i}}E_{P_{-i}}\max E_{P_i}u_i(x) = \underline{v}_i$$

Plus important pour notre discussion est le fait qu'il est également impossible que le joueur i reçoive (en espérance) moins que \underline{v}_i à n'importe quel équilibre du jeu répété. Le raisonnement derrière cette observation étend le raisonnement précédent : à chaque période, le joueur i peut agir de manière myope et jouer une meilleure réponse contre le choix des autres.

C'est pour cela qu'on appelle un paiement (espéré) $v_i \geq \underline{v}_i$ "individuellement rationel" pour le joueur i dans le jeu répété, et "strictement individuellement rationel" si $v_i > \underline{v}_i$. Ces expressions ne sont pas idéales, parce que les paiements associés à \underline{v}_i , à la difference du choix des stratégies prudentes (voir ch. 1), émergent d'un raisonnement interactif.

A titre d'exemple, considérons le jeu de base \overline{G} suivant entre deux joueurs :

		2	
		G	D
1	H	0,8	6,7
	M	10,4	3,5
	B	4,1	7,3

La lectrice ou le lecteur vérifieront facilement que dans ce jeu, $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (5.8, 3)$. Pour décrire les possibilités d'utilité dans ce jeu, nous visualisons les paiements dans le plan bidimensionnel (v_1, v_2) (qui représente les "profils de paiements") dans la figure 9.2.

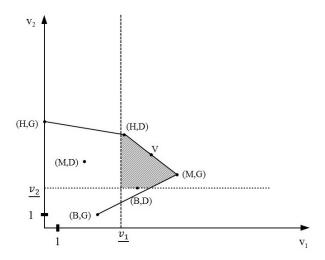


Fig. 9.2 – Les profils de paiements faisables

Ce graphique montre les six issues possibles du jeu en stratégies pures. On voit immédiatement que seulement trois d'entre elles, (H,D), (B,D) et (M,G), sont acceptables dans le sens où les deux joueurs obtiennent au moins leur paiement minimax. Dans le jeu statique, il y a un seul équilibre de Nash en stratégies mixtes, qui est en stratégies pures et égal à (B,D). Cependant, à l'équilibre du jeu infiniment répété, d'autres équilibres sont possibles.

Remarque (le "théorème de folk" pour le jeux \overline{G}): Si le jeu \overline{G} de l'exemple ci-dessus est infiniment répété et si les fonctions de paiement du jeu répété sont données, soit par la limite des moyennes (9.5), soit par la somme actualisée (9.4) avec des taux d'actualisation proche de 1, tous les paiements dans la surface hachurée du graphique 9.2 peuvent être réalisés par un équilibre parfait dans le jeu répété.

Cette remarque a de quoi surprendre. D'après les reflexions faites jusqu'ici il n'est peut-être pas surprenant que les paiements des trois issues statiques (H,D), (B,D) et (M,G) peuvent être réalisés à l'équilibre de Nash.⁶

⁶Pour être plus précis il faudrait distinguer entre les paiements (individuels) des joueurs et les profils de paiements, qui sont des points dans la plaine (u_1, u_2) . S'il n'y a pas de risque de confusion nous ignorons cette subtilité.

Ces paiements peuvent être réalisés par une combinaison intelligente de menaces et promesses hors équilibre, telle que discutée ci-dessus.⁷ Ce qui peut surprendre est que l'ensemble de paiements qui peuvent être réalisés à l'équilibre est beaucoup plus grand et que l'équilibre est parfait (c.à.d. que les menaces et promesses peuvent être construites de manière crédible).

La première de ces observations peut s'expliquer à l'aide d'un example. Comment réaliser le point V au milieu de la ligne qui relie le paiement de (H,D) à celui de (M,G) dans la graphique 9.2? Si les fonctions de paiement du jeu répété sont données par la limite des moyennes (9.5) (donc si tous les gains d'un joueur ont le même poids dans son évaluation totale), il suffit de jouer, sur le chemin d'équilibre, l'issue (H,D) 50 pour cent du temps et l'issue (M,G) les autres 50 pour cent (pas besoin de stratégies mixtes). En moyenne, le paiement moyen en résulte. Si les fonctions de paiement du jeu répété sont données par la somme actualisée il faut modifier les fréquences des deux choix de manière correspondante.

Plus généralement, nous venons de construire le comportement collectif dynamique nécessaire pour soutenir un profil de paiements qui est une combinaison convexe de profils de paiements du jeu statique. Cette observation nous mène à la définition générale suivante.

Définition : Un profil de paiements $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ est faisable si le profil est une combinaison convexe de paiements associés aux issues du jeu G. Formellement, $(u_1, ..., u_n)$ est faisable si

$$(u_1, ..., u_n) \in Conv\{(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n; \exists (x_1, ..., x_n) \in X : u_i(x) = v_i \forall i \}.$$

La surface hachurée du graphique 9.2 est donc l'ensemble de profils de paiements faisables et individuellement rationels. Le théorème suivant est remarkable parce qu'il constate que ces deux conditions sont en fait (presque) suffisantes pour réaliser les paiements à l'équilibre parfait du jeu répété.

Théorème 9.5 (le "théorème de folk") : Soit V^* l'ensemble des profils de paiements qui sont faisables et strictement individuellement rationels. Si $int(V^*) \neq \emptyset$ et si les fonctions de paiement du jeu répété sont données, soit par la limite des moyennes (9.5), soit par la somme actualisée (9.4) avec des

⁷C.à.d., "sur le chemin d'équilibre" (quand personne n'a dévié du comportement commun envisagé) chaqu'un choisit son action statique de l'issue en question, et "hors équilibre" (quand quelqu'un a dévié) on choisit les punitions et récompenses necéssaires pour tenir tout le monde sur le chemin d'équilibre en premier lieu.

taux d'actualisation proche de 1, tout profil de paiements $v \in V^*$ peut être réalisé par un équilibre parfait dans le jeu répété.

Bien que des différentes versions de ce théorème aient été connues depuis longtemps, la démonstration complète du théorème, due à Fudenberg et Maskin (1986), n'est pas évidente. La difficulté principale est de trouver la bonne composition de punitions pour un joueur qui dévie du comportement d'équilibre et de récompenses pour les joueurs qui le punissent hors équilibre, ainsi qui des récompenses et punitions pour ceux qui dévient des stratégies de récompense et punition hors équilibre, etc. La condition que l'intérieur de V^* (dans \mathbb{R}^n) ne soit pas vide est importante (et normalement, comme à la figure 9.2, satisfaite sans autre); elle implique que les paiements possibles des différents joueurs varient de manière suffisante afin de pouvoir achever toutes les punitions et récompenses nécessaires.

Nous n'aborderons pas la démonstration du théorème et renvoyons les lecteurs à l'article de Fudenberg et Maskin (1986) et a l'oevre de Fudenberg et Tirole (1991) pour plus de discussions et exemples.

9.3 Problèmes

Question 9.1:

On considère un jeu sous forme normale à deux joueurs, $G = (\{1, 2\}, X_1, X_2, u_1, u_2)$. Supposons que G soit répété T fois et qu'après chaque étape tout joueur observe l'issue de cet étape. Le paiement de tout joueur dans le jeu répété est égal à la somme des paiements obtenus à chaque étape.

1. Supposez que G soit donné par la matrice suivante :

		Joueur 2		
		A	В	
	A	2	5	
Joueur 1	В	0	3	
		б	3	

Dessinez l'arbre du jeu répété pour T=2.

- 2. Déterminez les équilibres parfaits du jeu.
- 3. Déterminez les équilibres de Nash de ce jeu.
- 4. Déterminez les équilibres parfaits du jeu répété 10 fois.
- 5. Supposer que le jeu soit répété un nombre infini de fois et que chaque joueur actualise le gain de chaque période avec un facteur d'actualisation $\delta = 0.8$. Est-ce possible que l'issue (B,B) soit réalisée à l'équilibre parfait ?
- 6. Supposez maintenant que G soit donné par la matrice de paiements suivante :

			Jou€	eur 2
		A	В	$^{\circ}$ C
	A	2	5	0
		2	0	0
Joueur 1	В	0	3	1
Joueur 1		5	3	1
	С	0	1	2
		0	1	3

Dessinez l'arbre du jeu répété pour T=2. Combien de stratégies pures un joueur a-t-il dans ce jeu répété ?

9.3. PROBLÈMES 175

7. Déterminez les équilibres parfaits de ce jeu répété.

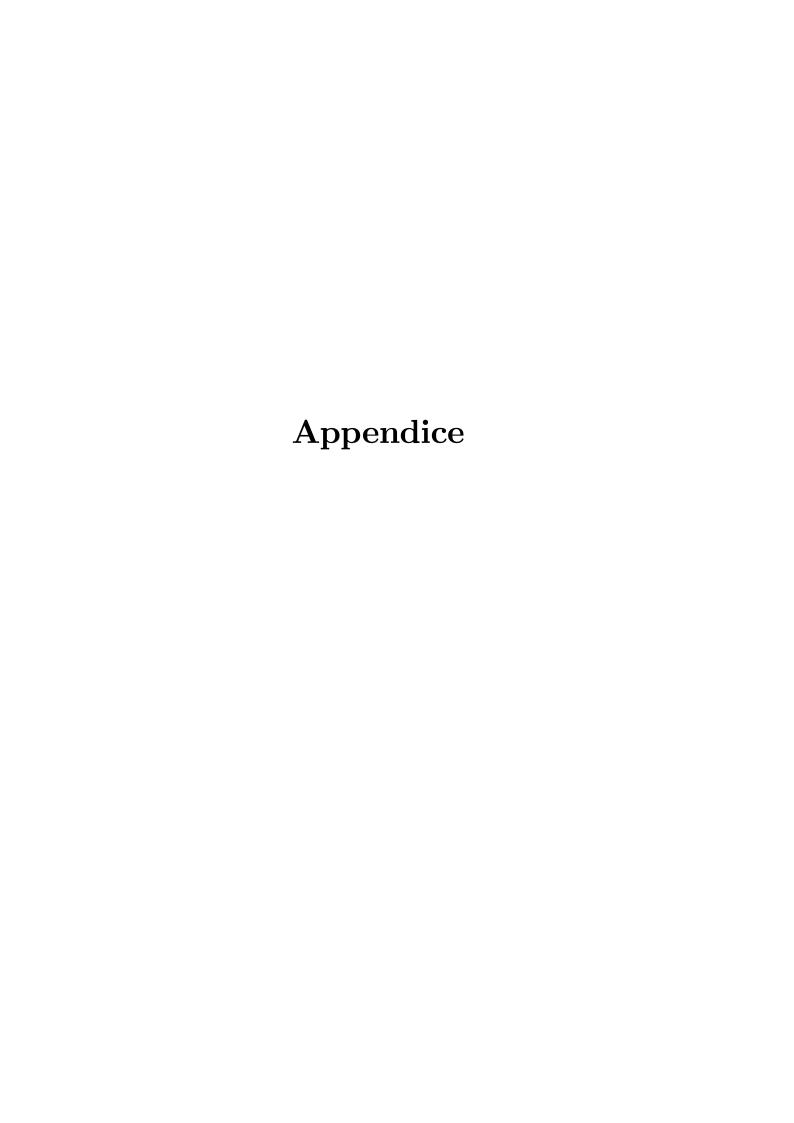
(Une discussion intéressante de nombreux aspects des jeux tels que celuici, ainsi que quelques résultats empiriques, se trouvent dans le livre de R. Axelrod: *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York, 1984)

Question 9.2:

Reprenons le conflit entre la chaîne monopoliste de supermarchés avec des succursales dans chacun de T villages de la région et ses concurrents potentiels (question 6.3). Différent de la question 6.3 nous supposons ici que $T=\infty$. Supposons également qu'il y ait un monopoleur (comme à la question 6.3) et un seul concurrent, qui considère l'entrée séquentielle dans chacun des marchés $k=1,2,\ldots$ Si, dans un village, le concurrent entre, la chaîne peut, soit réagir agressivement ("guerre des prix"), soit céder ("duopole paisible"). La valeur que la chaîne de supermarchés attribue au monopole dans un village $k,k=1,\ldots$, est égale à 5. Si un concurrent est entré dans le marché d'un village, une guerre des prix donne des profits de 0, et un duopole paisible des profits de 2 aux deux participants. Le coût d'entrée est de 1 par village. Les décisions d'entrée et de réaction sont prises successivement dans un village après l'autre. A chaque étape toutes les décisions prises antérieurement, ainsi que les données du jeu, sont connues.

Le monopoleur et son concurrent évaluent le jeu par la moyenne des profits dans tous les villages : $U_i(s_M, s_C) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T u_i(x^k)$, où $u_i(x^k)$ est le profit de joueur i=M, C au village k.

- 1. Trouvez les équilibres parfaits du jeu. Est-ce possible que le concurrent entre dans ce marché?
- 2. Comment la situation se présente-t-elle si le concurrent décide sa stratégie d'entrée dans tous les villages d'un seul coup?



Solutions aux problèmes choisis

Cette partie propose des solutions à une sélection restreinte des questions formulées à la fin de chaque chapitre, souvent des questions plus difficiles (ce qui ne veut pas dire que les questions qui ne figurent pas dans ce chapitre sont nécessairement plus simples). Le choix est délibérément limité, pour laisser au lecteur/à la lectrice le plaisir de continuer à travailler sur les réponses des autres questions, ce qui est le seul moyen de vraiment apprendre.

1) Résolution de la question 1.1

QUESTION : Modélisez la négociation de salaire entre la direction d'une entreprise et le syndicat par un jeu sous forme normale.

Il y a plusieurs façons de répondre à cette question. Ici nous proposons une solution qui montre que le concept de la forme normale est bien capable d'intégrer des aspects dynamiques.

Comme point de départ il est certainement raisonnable de supposer que $\mathcal{N} = \{E, S\}$ où E est la direction de l'entreprise et S le syndicat. Alternativement, on peut considérer la possibilité de divisions au sein des deux parties, le cas de différents syndicats en France par exemple, ou l'inclusion d'autres parties telles qu'un gouvernement.

Supposons également qu'il s'agisse uniquement de négociations salariales. Par conséquent, des questions telles que le temps de travail hebdomadaire, la sécurité sur le lieu du travail, etc., n'entrent pas en considération. De nouveau, on pourrait certes tout aussi bien considérer ce type de négociation multi-dimensionelle. Donc, pour les deux parties, il s'agit de trouver un nombre x où x représente l'augmentation des salaires en pour cent au cours de la période considérée.

Tout d'abord, il est nécessaire de définir les différents aspects d'une procédure de négociation. Nous pouvons faire ressortir ceux qui nous paraissent les plus importants pour la question donnée, soit :

- 1. Les négociations durent. Elles ont souvent plusieurs tours qui comprennent des énoncés, des promesses, des menaces, etc.,
- 2. Le syndicat peut lancer une grève,
- 3. La direction peut répondre par un lock-out, comme il est autorisé dans certains pays,
- 4. Les parties peuvent parvenir à un accord ou cet accord leur est imposé par un conciliateur.

Que signifie un "tour de négociation"? Cela dépend des conventions des parties. Par exemple, chaque jour de négociation peut être considéré comme un nouveau tour. Toutefois, pour le raisonnement stratégique qui nous intéresse ici, les conventions importent peu. Ce sont davantage les pertes subies par les deux parties qui priment, si elles ne concluent pas d'accord au bout d'un certain laps de temps. Ces pertes découlent des coûts d'attente lors des négociations. Généralement, on peut modéliser ces coûts par des fonctions continues $c^{E}(t)$ et $c^{S}(t)$ qui décrivent les coûts subis par E et S si les parties ne trouvent pas un arrangement avant l'instant t (en supposant que la négociation commence à t=0). Malheureusement, la description d'un jeu en temps continu est mathématiquement plus difficile que ce qui est possible dans ce cours. Nous dénotons donc par un "tour" la période après laquelle le manque de consensus commence à se faire ressentir. A l'exemple des négociations avec les routiers français en grève en automne 2000, un tour représente une période de deux ou trois jours. En effet, passé ce délai les réserves d'essence auprès de certains ménages et producteurs privés et services publics commencent à s'épuiser. Dans d'autres domaines, un "tour" peut correspondre à une période de plusieurs semaines, mois, etc.

Par conséquent, si les deux parties se mettent d'accord au premier tour, elles ne supportent aucun coût de négociation; si elles ne se mettent d'accord qu'au deuxième tour, elles supportent des coûts c^E et c^S , respectivement, avec c^E et c^S des nombres positifs; si elles se mettent d'accord au troisième tour, elles supportent des coûts de $2c^E$ et $2c^S$; etc. Des fonctions de coûts plus complexes (non-linéaires) sont évidemment possibles, elles concernent des applications plus spécifiques et relèvent de l'empirique. Finalement, il faut considérer les coûts engendrés par les grèves et les lock-outs, nous pouvons les définir par g^E , g^S , l^E , l^S par période.

Comment peut-on décrire les stratégies des différentes parties? De nouveau, il existe un grand nombre de possibilités, qui dépendent de la situa-

tion considérée. Etant donné notre modélisation, celle-ci faisant appel aux "tours de négociation", une stratégie doit au moins répondre aux questions suivantes :

- 1. Que proposer au premier tour?
- 2. Comment réagir à la proposition de l'autre lors du premier tour?
- 3. Comment agir au deuxième tour, en fonction de ce qui s'est passé au premier?
- 4. Plus généralement, comment agir au k-ème tour, en fonction de ce qui s'est passé au (k-1)-ème tour?
- 5. Quand lancer une grève?
- 6. Répondre à une grève avec un lock-out?
- 7. Comment réagir à un lock-out?

Comme on peut le constater, les stratégies dans un tel jeu sont très complexes. L'art de la modélisation économique est de les rendre aussi simples que possible en vue du problème que l'on désire étudier.

Nous allons formuler ici une modélisation possible. Appelons x_t^E la proposition de la direction au t-ième tour et x_t^S la proposition du syndicat au t-ième tour. Si $x_t^E \geq x_t^S$, la négociation est terminée et l'accord est x_t^S . Si $x_t^E < x_t^S$, la négociation se poursuit au prochain tour.

De plus, après le premier tour, le syndicat peut choisir à chaque tour de faire grève pendant ce tour, au lieu de faire une proposition . Décrivons cette décision par la variable $g_t \in \{O, N\}$: décision de grève au t-ième tour, oui ou non. Supposons également que la direction n'utilise jamais les lock-outs, à l'exemple du cas de la Suisse.

L'ensemble des stratégies du joueur S est donc donné par $X^S = \{x_1^S, d_2^S(.), d_3^S(.), ...\}$, où x_1^S est un nombre réel, $d_2^S = d_2^S(.)$ est une fonction $\{(x_1^E, x_1^S); x_1^E, x_1^S \in \mathbf{R}\} \rightarrow \{O\} \cup \mathbf{R}$, de l'ensemble de tous les résultats possibles du premier tour dans l'ensemble des nouvelles propositions ou de la décision de faire grève, si la négociation ne s'est pas achevée au premier tour. Donc, $d_2^S(x_1^E, x_1^S) = O$ si le syndicat répond à l'offre de l'entreprise par une grève, et $d_2^S(x_1^E, x_1^S) = x_2^S$ si le syndicat continue à négocier et demande x_2^S . De manière analogue, $d_3^S(.)$: $\{(x_1^E, x_1^S, x_2^E, x_2^S, g_t^2)\} \rightarrow \{O\} \cup \mathbf{R}$ pour le troisième tour et ainsi de suite pour les tours t > 3. Une stratégie du joueur S est donc une collection infinie de fonctions $(x_1^S, d_2^S, d_3^S, ...)$, qui représente la planification contingente du joueur. Nous avons la même procédure pour $E: X^E = \{x_1^E, d_2^E(.), d_3^E(.), ...\}$,

avec des significations analogues. On voit que les ensembles de stratégies de chaque joueur sont très (!) large.

Les fonctions de paiement, u^S et u^E , représentent les préférences des deux parties à propos des issues de la négociation. Considérons un modèle simple mais réaliste en supposant que les "paiements" des deux joueurs ne dépendent

- de l'accord final, x_t^* , si les parties se mettent d'accord, autrement les paiements sont $-\infty$,
 - du nombre de tours passés jusqu'à l'accord, t
 - du nombre de périodes de grève, t_q .

Donc, $u^S = u^S(x_t^*, t, t_g)$ et $u^E = u^E(x_t^*, t, t_g)$ avec la convention que $u^S = u^S(x_t^*, t, t_g)$ $u^{E}=-\infty$, si $t=\infty$. Une spécification numérique (si les coûts sont exprimés en termes de pourcentages de salaire gagnés ou perdus) peut être :

$$u^{S}(x_{t}^{*}, t, t_{g}) = x_{t}^{*} - (t - 1)c^{S} - t_{g}g^{S}$$

$$u^{E}(x_{t}^{*}, t, t_{g}) = -x_{t}^{*} - (t - 1)c^{E} - t_{g}g^{E}$$

Ici, les coûts sont normalisés d'une façon qui les rend comparable au gains exprimés par x_t^* . On note dans la spécification choisie ci-dessus que les u_i dépendent des issues (comme nous l'avons défini dans le cours), mais dans le cas présent de manière simplifiée.

2) Résolution de la question 1.3

QUESTION: Deux producteurs se font concurrence sur le marché d'un bien homogène. Les deux producteurs ont les mêmes coûts de production, linéaires et sans coûts fixes, donnés par $C_i(q_i) = 4q_i$, où q_i est la quantité produite par le producteur i. La demande sur le marché est décrite par la fonction

$$p = \begin{cases} 20 - Q, & \text{si } Q \le 20, \\ 0, & \text{si } Q > 20, \end{cases}$$

 $p = \begin{cases} 20 - Q, & \text{si } Q \leq 20 \\ 0, & \text{si } Q > 20, \end{cases}$ où p est le prix réalisé sur le marché et $Q = q_1 + q_2$ la quantité totale offerte par les deux producteurs. Les producteurs produisent simultanément les quantités qu'ils veulent vendre, et le prix sur le marché s'ajuste de manière à ce que tout soit vendu.

1. L'interaction correspond au jeu sous forme normale suivant : \mathcal{N} $\{\text{firme 1, firme 2}\}, X_1 = X_2 = \mathbb{R}_+$

$$u_i(q_1, q_2) = \begin{cases} (20 - q_1 - q_2 - 4)q_i & \text{si } q_1 + q_2 \le 20\\ -4q_i & \text{si } q_1 + q_2 \ge 20. \end{cases}$$

2. Considérons la fonction de profit (d'utilité) du producteur i pour un q_j donné. Cette fonction est dessinée à la figure 10.1 pour trois valeur différentes de q_j . Pour $q_i < 20 - q_j$, elle est une fonction quadratique, et le maximum de la fonction se trouve certainement à gauche de $20 - q_j$ (où sa valeur est négative).

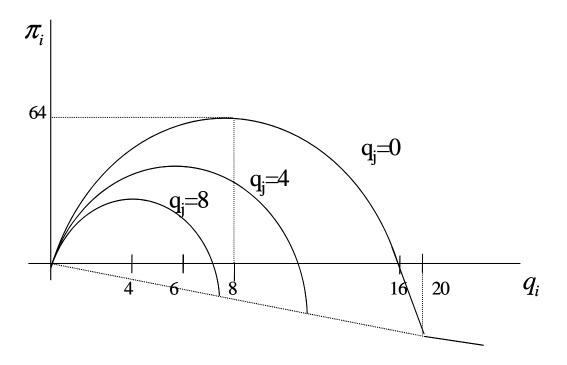


Fig. 1 – Fonctions de profit de firm i

Le profit maximal de i est donc donné par la condition de première ordre

$$\frac{\partial u_i}{\partial q_i} \equiv 16 - 2q_i - q_j = 0 \Longleftrightarrow q_i = 8 - \frac{1}{2}q_j$$

$$\text{avec } u_i^{\text{max}} = \left(8 - \frac{1}{2}q_j\right)^2.$$

Ces formules montrent immédiatement que, si $0 < q_j < 16$, la fonction de profit du producteur i se situe à gauche et au-dessous de la fonction de profit pour $q_j = 0$ (voire la figure 10.1). Si $q_j \ge 16$, le profit de i est toujours négatif. Par conséquent, tout $q_i > 8$ donne un profit strictement plus faible que $q_i = 8$, pour tout $q_j \ge 0$. Donc, tout $q_i > 8$ est

strictement dominé par $q_i = 8$ (d'ailleurs, observation peu surprenante, $q_i = 8$ est la quantité de monopole). Inversement, le graphique montre également qu'aucun $q_i \leq 8$ est strictement dominé.

- 3. Le jeu réduit est donc $\widehat{G}^1 = (\mathcal{N}, \widehat{X}_1^1 = \widehat{X}_2^1 = [0, 8], u_1, u_2)$. La figure 10.1 montre maintenant que tout $q_i < 4$ est strictement pis que $q_i = 4$ pour n'importe quel q_j donné, parce que chaque fonction de profit est strictement croissante pour $q_i < 4$ (si $q_j \leq 8$). Donc $0 \leq q_i < 4$ sont des stratégies strictement dominées dans le jeu \widehat{G}^1 .
- 4. Après le deuxième tour d'élimination on arrive donc à un jeu avec \$\hat{X}_1^2 = \hat{X}_2^2 = [4,8]\$. Dans ce jeu chaque fonction de profit (c.-à-d. la fonction de profit de i pour tout q_i ∈ [4.8]) est strictement décroissante pour q_i > 6 et donc strictement dominé par q_i = 6. Par conséquent, \$\hat{X}_1^3 = \hat{X}_2^3 = [4,6]\$.

Supposons qu'après n tours d'éliminations, on ait $\widehat{X}_1^n = \widehat{X}_2^n = [i_n, s_n]$. Comme nous l'avons vu, le maximum de la fonction de profit pour $q_j = i_n$ se trouve en

$$q_i = 8 - \frac{1}{2}i_n$$

et celui de la fonction de profit pour $q_j = s_n$ se trouve en

$$q_i = 8 - \frac{1}{2}s_n.$$

Donc, tout $q_i > 8 - \frac{1}{2}i_n$ et tout $q_i < 8 - \frac{1}{2}s_n$ est strictement dominé (les premiers par $q_i = 8 - \frac{1}{2}i_n$ et les derniers par $q_i = 8 - \frac{1}{2}s_n$). Il en résulte, $\widehat{X}_1^{n+1} = \widehat{X}_2^{n+1} = \left[8 - \frac{1}{2}s_n, 8 - \frac{1}{2}i_n\right]$. Les ensembles de stratégies des jeux réduits, tour après tour, sont donc donnés par :

$$[0,8],\,[4,8],\,[4,6],\,[5,6],\,[5,5.5],\,[5.25,5.5],\,{\rm etc.}$$

La formule pour \widehat{X}_i^{n+1} montre que le processus ne s'arrête pas. Mais après une dizaine d'itérations on a cerné l'ensemble des stratégies successivement non-dominées relativement bien. Question pour ceux qui désirent approfondir : Que se passe-t-il avec l'intervalle $\left[8-\frac{1}{2}s_n,8-\frac{1}{2}i_n\right]$ si n devient très grand? Le jeu réduit par ESTSSD est donné par la limite de cette suite d'intervalles.

5. Laissé au lecteur/à la lectrice.

3) Résolution de la question 2.3

QUESTION: Quelqu'un vend 100 unités d'un bien auxquelles il attribue une valeur de 10 (francs) par pièce. Il y a n acheteurs potentiels, qui sont identiques, ont des fonds illimités et attribuent une valeur de 20 (francs) à chaque unité du bien. Pour participer à l'enchère de ces objets, tout acheteur doit soumettre (sous pli cacheté) une fonction de demande $d_i(\circ)$ qui spécifie la quantité demandée pour chaque prix p et dont l'addition des quantités est inférieure ou égale à $100: \sum_p d_i(p) \leq 100$. Pour simplifier on suppose qu'il n'y a que trois prix possibles, p=10,15,20.

1. Pour illustrer la logique de l'attribution des unités, considérons l'exemple suivant avec n=3 acheteurs :

```
d_1(10) = 40 d_2(10) = 90 d_3(10) = 20

d_1(15) = 40 d_2(15) = 10 d_3(15) = 50

d_1(20) = 20 d_2(20) = 0 d_3(20) = 30
```

Pour cette donnée d'enchères nous avons $A_d(10) = 150$, $A_d(15) = 100$ et $A_d(20) = 50$.

La quantité totale demandée au prix p est $\sum_{q\geq p} A_d(q)$ (toute unité demandée à un prix q>p sera certainement aussi demandée au prix p). Donc, $p^*=15$. (au prix de 20 la demande est inférieure à l'offre, au prix de 10 l'inverse se produit).

L'allocation qui y est associée est la suivante : toute demande pour p=20 est satisfaite complètement, les demandes au prix p=10 ne reçoivent rien, et le rationnement s'opère pour p=15. A ce prix l'offre résiduelle est de $100-\sum A_d(20)=100-50=50$, et la demande de $A_d(15)=100$. Le facteur d'attribution est donc égale à $\pi=\frac{1}{2}$ (identique pour tous les participants). L'allocation s'effectue de la façon suivante entre les 3 enchérisseurs :

Le joueur 1 obtient : $20 + \pi 40 = 40$, le joueur 2 obtient : $0 + \pi 10 = 5$, et le joueur 3 obtient : $30 + \pi 50 = 55$.

Le profit des enchérisseurs dépend du type de l'enchère et est donné dans le tableau suivant :

Enchérisseur	enchère uniforme	enchère discriminatoire
1	40(20-15)=200	20(20-20)+20(20-15)=100
2	5(20-15)=25	5(20-15)=25
3	55(20-15)=275	30(20-20)+25(20-15)=125

Pour simplifier, nous utilisons à partir de maintenant la notation suivante : $d_i = (d_i(10), d_i(15), d_i(20)) = (d_i^{10}, d_i^{15}, d_i^{20})$.

2. Quelles sont les stratégies faiblement dominées pour l'enchère uniforme?

D'abord on constate que toute demande d_i telle que $d_i^{10} + d_i^{15} + d_i^{20} < 100$ est faiblement dominée par \hat{d}_i avec $\hat{d}_i(20) = d_i^{20}$, $\hat{d}_i(15) = d_i^{15}$, $\hat{d}_i(10) = 100 - d_i^{15} - d_i^{20}$. La raison est la suivante : si $p^* = 15$ ou $p^* = 20$, l'allocation ne change pas. Si $p^* = 10$, la demande \hat{d}_i reçoit strictement plus d'unités : le facteur d'attribution $\pi(10)$ décroît légèrement (et cette diminution concerne tout joueur), mais l'allocation $\pi(10)d_i(10)$ s'accroît proportionnellement et profite pleinement au joueur i. Formellement :

$$\frac{d}{d_i(10)}(\pi(10) d_i(10)) = \frac{d}{dx}(\frac{c}{b+x}x) = \frac{cb+cx-cx}{(b+x)^2} > 0$$

Une autre stratégie faiblement dominée est évidemment $d_i = (0, 0, 100)$. Est-ce possible qu'un $(d_i^{10}, d_i^{15}, d_i^{20})$ avec $d_i^{10} + d_i^{15} + d_i^{20} = 100, d_i^{20} < 100$, soit faiblement dominé?

- (a) Par $(\hat{d}_i^{10},\hat{d}_i^{15},\hat{d}_i^{20})$ avec $\hat{d}_i^{10} < d_i^{10}$? Non : si $p^*=10$ et si d_i^{10} n'a pas été rationné (les autres joueurs jouent donc $d_i^{10}+d_i^{15}+d_i^{20}<100$)
- (b) Par $(\widehat{d}_i^{10}, \widehat{d}_i^{15}, \widehat{d}_i^{20})$ avec $\widehat{d}_i^{10} > d_i^{10}$? Non : si $p^* = 15$ et la nouvelle demande laisse le prix à 15 (donc la nouvelle demande, $\widehat{d}_i^{10} d_i^{10}$, obtient 0, mais on perd pour d_i^{15} ou d_i^{20}).
- (c) Par $(\widehat{d}_i^{10}, \widehat{d}_i^{15}, \widehat{d}_i^{20})$ avec $\widehat{d}_i^{10} = d_i^{10}$ et $\widehat{d}_i^{15} > d_i^{15}$? Non : si $p^* = 15$ et le reste inchangé, on est rationné avec la nouvelle demande au lieu d'être satisfait complètement (avec d_i^{20}).
- (d) Par $(\hat{d}_i^{10}, \hat{d}_i^{15}, \hat{d}_i^{20})$ avec $\hat{d}_i^{10} = d_i^{10}$ et $\hat{d}_i^{15} < d_i^{15}$? Non : si $p^* = 15$ et la nouvelle demande fait changer le prix à p = 20.
- 3. Quelles sont les stratégies faiblement dominées pour l'enchère discriminatoire?

De nouveau, il faut $d_i^{10}+d_i^{15}+d_i^{20}=100$ (autrement : augmenter d_i^{10}). De plus, $d_i^{20}>0$ est faiblement dominé par $d_i^{20}=0$: si la nouvelle demande à p=15 ou p=10 attire quelques unités, on est strictement mieux qu'avec d_i^{20} (où le prix est de 20, donc le profit de 0). Sinon, on ne perd toutefois pas.

Comme pour l'enchère uniforme, on montre qu'aucun $(d_i^{10}, d_i^{15}, 0)$ avec $d_i^{10} + d_i^{15} = 100$ est dominé.

Pour la suite de la résolution de cet exercice, on pose comme hypothèse (voir énoncé) qu'il y a 11 acheteurs (n=11) et que ces acheteurs adoptent un comportement symétrique à l'équilibre : $(d_i^{10}, d_i^{15}, d_i^{20}) = (d^{10}, d^{15}, d^{20})$ pour chaque joueur.

4. **Dans l'enchère uniforme**, il faut la condition suivante pour que $p^* = 20$ soit le PEDO :

$$(n-1)d^{20} \ge 100.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que des variations individuelles de d_i^{20} ne changent pas le prix $p^*=20$. Donc tout (d^{10},d^{15},d^{20}) avec $d^{20} \geq 10$ $(=\frac{100}{n-1})$ est un équilibre avec $p^*=20$.

Pour que $p^* = 10$ soit le PEDO, il faut que :

$$n(d^{15} + d^{20}) < 100$$

 $n(d^{15} + d^{20}) + 1 > 100$

Donc la déviation de d^{10} à $d_i(15)$ ou $d_i(20)$ par une seule unité de la part d'un seul joueur fait augmenter le prix de 10 à 15. Donc :

$$n(d^{15} + d^{20}) = 99 \Leftrightarrow d^{15} + d^{20} = 9$$

est une condition nécessaire pour que $p^* = 10$ soit le PEDO. Mais cette condition ne suffit pas tout à fait. Supposons, par exemple, que $d^{20} = 0$ et considérons la déviation $d_i(20) = 99$. Cette déviation fait changer le prix de 10 à 15 et donne 99 unités au joueur qui dévie, au prix de 15 (ce qui lui vaut 5 par unité). Donc il obtient un paiement de $99 \cdot 5$, ce qui est plus que les $9 \cdot 10$ qu'il reçoit à l'équilibre. Pour exclure ce type de déviation il faut évidemment que d^{20} soit suffisamment large. En particulier, il est clair que (91,0,9) est un équilibre avec PEDO 10.

5. **Dans l'enchère discriminatoire**, pour que le PEDO soit $p^* = 20$, il faut que $d^{20} > 0$ ce qui est dominé (voir le point 2 sur les stratégies faiblement dominées).

Pour que $p^* = 10$ soit le PEDO, il faut, comme auparavant, $nd^{15} < 100$ (en rappelant que $d^{20} = 0$). Avec cela, un joueur obtient le paiement suivant :

$$d^{15}(20-15) + \frac{100 - nd^{15}}{nd^{10}}d^{10}(20-10) = U$$
 (A1)

Si ce joueur dévie d'une unité de d^{10} à d^{15} ($\widehat{d}^{15} = d^{15} + 1$), sans que cela ne change le p^* , il échappe au rationnement (ce qui est un avantage),

mais il obtient alors 5 de surplus pour cette unité au lieu de 10 (ce qui est un désavantage) :

$$(d^{15} + 1)(20 - 15) + \frac{100 - nd^{15} - 1}{nd^{10} - 1}(d^{10} - 1)(20 - 10) = \widehat{U}$$
 (A2)

Est-ce que la déviation est profitable? En d'autres termes, est-ce que $\widehat{U} - U > 0$? On vérifie facilement que cela est en fait le cas. Intuitivement, le facteur d'attribution $\pi(10)$ est très faible (inférieur ou égal à $\frac{100}{11\cdot 91} < \frac{1}{10}$) et il ne change pas beaucoup à la suite de la légère modification apportée par cette déviation. Donc, gagner 5 avec certitude (en cas de déviation), opposé à gagner 10 avec une probabilité $\approx \frac{1}{10}$ est attractif; donc la déviation est profitable.

Si, différent de ce que nous avons supposé ci-dessus, toute déviation change le prix p^* de 10 à 15, on se trouve dans le cas où $d^{15} = 9$. Aussi dans cette situation, la demande réallouée de d^{10} à d^{15} échappe au rationnement et le rationnement pour les unités demandées au prix de 10 se détériore légèrement. En fait, les formules (A1) et (A2) restent valables pour $d^{15} = 9$ et le deuxième terme dans (A2) disparaît. On arrive ainsi au résultat que $p^* = 10$ ne peut pas être le PEDO à l'équilibre.

6. Les prédictions des prix PEDO auxquels on peut s'attendre dans les deux types d'enchères, en présence ou non de communication préalable entre les joueurs sont donc les suivantes :

1 .	• C	1 .	1.		. •
enchère	unitorme	enchère	disc	rımına	atoire

Sans communication	p = 10, 15, 20	p = 15?
Avec communication	p = 10	p = 15

Ces prédictions sont confirmées de façon relativement claire par les expériences reportées dans Goswami et al. (1996) : "Collusion in uniform-price auctions : experimental evidence and implications for treasury auctions", Review of Financial Studies 9, 757-785.

4) Résolution de la question 6.1

QUESTION: Au jeu de Nim deux joueurs regroupent un nombre d'allumettes dans plusieurs tas différents; les deux joueurs doivent alternativement choisir un, et un seul, tas et en enlever au moins une allumette; le dernier joueur à enlever une allumette gagne.

1. L'arbre de jeu pour un jeu de Nim avec 2 tas dont l'un contient 1 allumette et l'autre 3 allumettes est donné à la Figure 1. Nous décrivons les noeuds par le nombre d'allumettes sur chaque tas : $(m_1,, m_N)$ où N est le nombre initial de tas (ici N=2). Notez que l'origine de l'arbre est au milieu, au noeud (1,3).

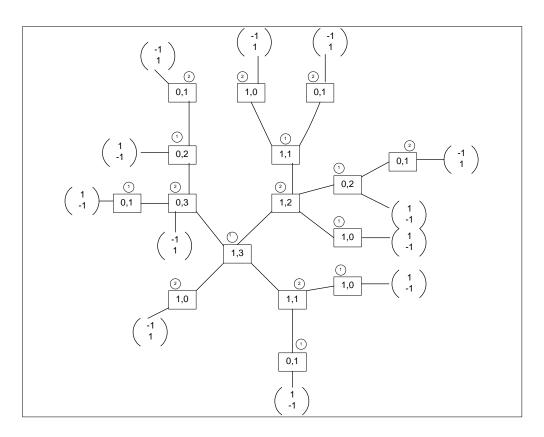


Fig. 2 – Un arbre de Nim

En utilisant la graphique, on voit qu'à l'équilibre parfait le joueur 1 gagne en allant de (1,3) à (1,1) (le chemin d'équilibre n'est pas unique : après (1,1) le joueur 2 peut choisir soit (1,0), soit (0,1)).

2. Le jeu avec 3 tas dont l'un contient une, un autre deux et le dernier 3 allumettes est traité de façon similaire (même si la graphique devient plus (en fait presque trop) riche).

3. Considérons maintenant un jeu de Nim arbitraire et montrons qu'il y a toujours un joueur qui a une stratégie qui permet de gagner contre toute défense (une stratégie gagnante).

Pour démontrer ce résultat, peut-être étonnant, nous utilisons les trois observations suivantes. 1. Parce que le jeu est fini, il existe un équilibre parfait, donc un équilibre. 2. Le jeu est à somme nulle. 3. A ce jeu on peut soit gagner, soit perdre, il n'y a pas d'autre possibilité (comme c'est le cas aux échecs, par exemple).

Maintenant le résultat découle immédiatement de la proposition 3.3 sur les jeux à somme nulle que nous avons formulée au chapitre 3 (sans la démontrer formellement): Si un jeu à deux joueurs et à somme nulle a un équilibre de Nash, alors les paiements des deux joueurs sont les mêmes à tout équilibre.

Pour mieux comprendre la logique de cette proposition, nous pouvons aussi démontrer le résultat cherché directement de la manière suivante. Prenons un équilibre (s_1^*, s_2^*) , identifié par récurrence à rebours, et supposons que ce soit le joueur 1 qui gagne à cet équilibre. On a

$$-1 = u_2(s_1^*, s_2^*) \tag{A3}$$

$$= \max_{s_0} u_2(s_1^*, s_2) \qquad \text{(équilibre)} \tag{A4}$$

$$-1 = u_{2}(s_{1}^{*}, s_{2}^{*})$$

$$= \max_{s_{2}} u_{2}(s_{1}^{*}, s_{2})$$
 (équilibre) (A4)
$$= \max_{s_{2}} -u_{1}(s_{1}^{*}, s_{2})$$
 (somme nulle) (A5)
$$= -\min_{s_{2}} u_{1}(s_{1}^{*}, s_{2})$$
 (définition du maximum) (A6)

$$= -\min_{s_2} u_1(s_1^*, s_2) \qquad \text{(définition du maximum)} \tag{A6}$$

Ici, l'égalité (A3) exprime le fait que le joueur 2 perd à l'équilibre (s_1^*, s_2^*) , l'égalité (A4) est la condition que s_2^* est une meilleure réponse à s_1^* , l'égalité (A5) dit que le jeu est à somme nulle, et l'égalité (A6) découle de la définition du maximum. Donc $u_1(s_1^*, s_2) \geq 1$ pour tout s_2 , ce qui implique que le paiement maxmin du joueur 1 est égal à 1 et s_1^* est prudente. Donc s_1^* est gagnante (et le joueur 2 ne peut pas obtenir un résultat meilleur que -1).

Pour tout jeu de Nim arbitraire il est donc possible d'associer, de façon récursive, soit un "p", soit un "g" à tout noeud, indiquant si le joueur à ce noeud peut gagner ou doit perdre. La Figure 2 montre cela pour le cas du jeu de la partie 1 de la question.

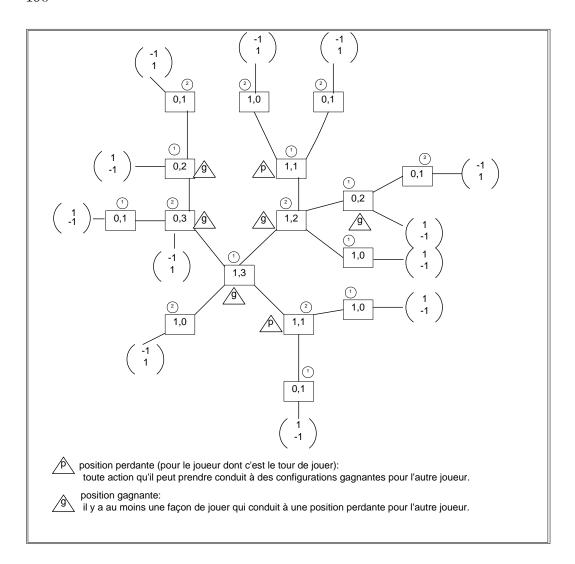


Fig. 3 – L'arbre de Nim augmentée

4. Par la procédure de la partie 3 on peut caractériser les positions gagnantes pour tout jeu de Nim donné. Mais on peut même caractériser les positions gagnantes de manière plus générale. Nous cherchons donc une formule qui permet de prédire l'issue du jeu pour tout jeu de Nim, sans faire la récurrence dans tout cas spécifique.

Pour donner un exemple de ce que nous cherchons, considérons l'observa-

tion simple suivante : "A tout jeu à deux tas, une position (n, m) est gagnante pour tout $n, m \ge 1, n \ne m$."

Démonstration: Toute position (k, k), $k \ge 1$, est perdante, parce que l'adversaire (celui qui n'a pas la main à ce noeud) peut jouer par "Vol de stratégie" (si i a la main, j prend toujours d'un tas la même quantité d'allumettes que i a pris de l'autre tas). Donc, si $n \ne m$, le joueur dont c'est le tour réduit le tas qui est plus grand jusqu'à l'égalité, ce qui produit un noeud du type (k, k).

Cette petite proposition et sa démonstration nous donnent la solution pour tout jeu à deux tas. Elle montre également qu'il est important, pour analyser des positions dans des jeux quelconques, d'avoir une méthode qui indique comment la valeur d'une position change avec un coup arbitraire. Voici une méthode simple, mais certainement non-triviale, pour achever cela:

On considère une position arbitraire $(m_1, ..., m_N)$, et on l'écrit en écrivant les chiffres $m_1, ..., m_N$ l'une au-dessous de l'autre en base deux (donc remplaçant l'expression décimale traditionnelle par l'expression duadique¹), comme à l'exemple suivant :

 $m_1: 11001001$ $m_2: 00000111$

:

 $m_N: 11001110$

Appelons une position "balancée" si toute colonne de la représentation duadique consiste en un nombre pair de1; sinon elle est "non-balancée" (l'exemple ci-dessus avec N=3 est balancé). La caractérisation des positions gagnantes se fait par 3 observations :

- 1. Si une position est balancée et non-vide, tout coup possible la transforme en position non-balancée. (Démonstration : Le coup change une et seulement une ligne et à cette ligne au moins un 1 est transformé en 0).
- 2. Si une position est non-balancée, il existe un coup possible qui, soit la transforme en position balancée, soit gagne immédiatement. (Démonstration : Choisir une des lignes les plus longues (les zéros initiales sont ignorés)), et changer, pour toute colonne où c'est nécessaire, le 1 en 0).

¹L'expression duadique de 13, par exemple, est obtenue en écrivant $13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, donc elle est 1101.

3. Dans une position balancée, il n'est pas possible de gagner avec un seul coup. (Démonstration : Toute position balancée non-vide consiste en au moins 2 tas).

Résumé: Il est impossible de gagner avec une position balancée, si l'autre joue de manière optimale. Mais parce que quelqu'un doit gagner, ce sera l'autre. En outre, d'après le point 2, toute position non-balancée est gagnante.

5) Résolution de la question 7.2

 $A: x_T = 0$ et A accepte tout x_T ,

QUESTION: Deux enfants, A et B, négocient la répartition d'un gâteau. Le père a coupé le gâteau en quatre pièces et enlevé le couteau. Les répartitions possibles sont donc (x, 1-x) = (0,1), (1/4,3/4), (1/2,1/2), (3/4,1/4), (1,0), où x dénote la part du gâteau obtenue par A. La négociation se fait à tour de rôle, c'est l'enfant B qui fait la dernière offre. A chaque tour $t \geq 1$ un enfant fait une proposition $x_t \in \{0,1/4,1/2,3/4,1\}$ et l'autre a le droit soit d'accepter cette proposition, soit de la rejeter. Si la proposition est acceptée, la négociation est terminée, la répartition étant $(x_t, 1-x_t)$. Si la proposition est rejetée, un nouveau tour commence dans lequel les rôles sont invertis. Chaque enfant actualise le temps avec un facteur d'actualisation $\delta = 0.8$ par tour. Si la négociation n'est pas terminée après T tours, le père intervient et confisque le gâteau, ce qui donne (0,0) aux enfants.

1. Comme d'habitude, nous résolvons le jeu par récurrence. B fait la dernière proposition. Au dernier tour, T, qui est un jeu d'ultimatum, il y a 2 équilibres parfaits :

```
B: x_T=1/4 et A accepte tout x_T\geq 1/4, rejette x_T=0.

A l'avant-dernier tour, il y a 3 équilibres parfaits :

A1: x_T=0 et A accepte tout x_T,
x_{T-1}=0 et B rejette tout x_{T-1}>0, accepte x_{T-1}=0
(note : B est prêt à accepter toute valeur x\leq 1-\delta=0.2),
A2: x_T=0 et A accepte tout x_T,
x_{T-1}>0 et B rejette tout x_{T-1}>0, accepte x_{T-1}=0
(note : ceci est un équilibre avec délai).
B1: x_T=1/4 et A accepte tout x_T\geq 1/4, rejette x_T=0,
x_{T-1}=1/4 et B rejette tout x_{T-1}>1/4, accepte x_{T-1}=0 et x_{T-1}=1/4 (note : B est prêt à accepter toute valeur x\leq 1-\delta\frac{3}{4}=0.4),
```

A l'antépénultième tour il y a 5 équilibres parfaits :

```
A1a: x_T = 0 et A accepte tout x_T,
x_{T-1} = 0 et B rejette tout x_{T-1} > 0, accepte x_{T-1} = 0,
x_{T-2} = 0 et A accepte tout x_{T-2}
    (ceci est la continuation de l'équilibre A1 par x_{T-2}=0),
A1b: x_T = 0 et A accepte tout x_T,
x_{T-1} = 0 et B rejette tout x_{T-1} > 0, accepte x_{T-1} = 0,
x_{T-2}=0 et A accepte tout x_{T-2}\geq 1/4, rejette x_{T-2}=0
   (continuation de l'équilibre A1 par un délai),
A2a: x_T = 0 et A accepte tout x_T,
x_{T-1} > 0 et B rejette tout x_{T-1} > 0, accepte x_{T-1} = 0,
x_{T-2} = 0 et A accepte tout x_{T-2}
    (continuation de l'équilibre A2 par x_{T-2} = 0),
A2b: x_T = 0 et A accepte tout x_T,
x_{T-1} > 0 et B rejette tout x_{T-1} > 0, accepte x_{T-1} = 0,
x_{T-2} = 1/4 et A accepte tout x_{T-2} \ge 1/4, rejette x_{T-2} = 0
    (continuation de l'équilibre A2 par x_{T-2} = 1/4),
B1a. x_T = 1/4 et A accepte tout x_T \ge 1/4, rejette x_T = 0,
x_{T-1} = 1/4 et B rejette tout x_{T-1} > 1/4, accepte x_{T-1} = 0 et x_{T-1} = 1/4,
x_{T-2} = 1/4 et A accepte tout x_{T-2} \ge 1/4, rejette x_{T-2} = 0
    (unique continuation de l'équilibre B1).
```

- 2. La structure est plus simple que cette liste laisse craindre. En particulier, quatre caractéristiques de cette liste peuvent être généralisées sans beaucoup de difficulté :
 - 1. Il est impossible que $x_t > 1/4$ à l'équilibre.

Démonstration : Supposons que $x_t > 1/4$ soit accepté. Nous savons que t < T. Soit d la longueur du délai d'un accord après t (donc d = 0 si les deux se mettent d'accord à t+1, d = 1 s'ils ne se mettent pas d'accord à t+1, mais à t+2, etc.). Supposons d'abord que A fasse la proposition x_t . Pour que B accepte, B doit obtenir moins que $\delta^{d+1}(1-x_t)$ à t+d+1. Donc il faut que $x_{t+d+1} \ge 1-\delta^{d+1}(1-x_t)$, ce qui implique $x_{t+d+1} > 1/2$. Si A fait la proposition à t+d+1 on peut répéter l'argument, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, soit t=T (une contradiction), soit B fasse la proposition.

Supposons maintenant que B fasse la proposition x_t . Donc A doit rejeter $x_t - 1/4$, ce qui implique $x_t - 1/4 \le \delta^{d+1} x_{t+d+1}$, donc $x_{t+d+1} > 1/4$.

En continuant ces deux arguments jusqu'à T on obtient une contradiction

(Intuition : Les deux savent que B obtiendra 1 ou 3/4 à la fin, donc ils ne donnent pas moins que $\delta \frac{3}{4}$, donc pas moins que 3/4, à B aux tours précédents.)

2. Si $x_{t_0} = 1/4$ est la répartition d'équilibre pour un t_0 , il faut que cela soit le cas pour tout $t < t_0$.

Démonstration : S'il y a un accord x à t_0-1 , A doit obtenir au moins $\delta \frac{1}{4}$, et B au moins $\delta \frac{3}{4}$. Donc il faut que $x \in [\delta \frac{1}{4}, 1 - \delta \frac{3}{4}] = [0.2, 0.4]$. Inversement, x = 1/4 est strictement préféré par les deux joueurs au désaccord. Ainsi de suite pour t_0-2 , ...

- 3. Il est impossible qu'à l'équilibre $x_t = 1/4$ et $x_{t+1} = 0$. Démonstration : A t B sait qu'il obtiendra tout au prochain tour. Il préfère donc un délai à la possibilité d'accorder plus que $1 - \delta$ (<1/4) à A.
- 4. Il est impossible qu'il y ait un délai de plus qu'un tour à l'équilibre. Démonstration : Supposons qu'il n'y a pas d'accord à t, mais qu'il y a un accord à t+1. D'après 1 et 2, $x_{t+1}=0$. Supposons que A propose à t-1. B accepte tout x tel que $1-x>\delta^2(1-x_{t+1})$. Proposer un x inacceptable donne $\delta^2 x_{t+1}$ à A. Toute proposition $x \in (0, 1-\delta^2) = (0, 0.36)$ est donc strictement préféré par les deux joueurs à un délai. A doit donc proposer x=1/4. L'argument pour le cas où B propose est analogue.

Ces observations limitent l'ensemble des équilibres possibles considérablement. En dénotant les trajectoires d'équilibre par une séquence de "0", "1/4" et "-" (pour délai), nous donnons à titre d'exemple les 8 trajectoires d'équilibre pour le cas de quatre tours :

- A. (0,0,0,0) E. (0,0,-,0)B. (-,0,0,0) F. (-,0,-,0)C. (0,-,0,0) G. (1/4,1/4,-,0)D. (1/4,-,0,0) H. (1/4,1/4,1/4,1/4)
- 3. La différence la plus importante entre le jeu considéré ici et le marchandage discuté au cours est qu'ici les joueurs ne peuvent pas régler avec précision suffisante l'arbitrage entre paiements aujourd'hui et paiements demain. Dans le modèle avec X=[0,1], un paiement de x demain équivaut à un paiement aujourd'hui de δx ; dans le modèle présent, tout paiement aujourd'hui est soit

strictement préféré, soit strictement pire. En fait, la partition du gâteau est si grosse que x demain doit typiquement être compensé par x aujourd'hui. Par conséquence la suite des x_t à l'équilibre, qui est unique et strictement décroissante dans le modèle continu, est constante (ou constante par morceau) et non-unique dans le modèle discret. Pour la même raison, le modèle discret connaît la possibilité de délai, qui est absente dans le modèle continu.

4. Si $\delta = 0.7$, l'argument ci-dessus tombe parce que la partition du gâteau (1/4) est plus fine que la perte provoquée par le passage de temps est grande (0.3). Si $\delta = 0.9$, les mêmes arguments qu'à la partie 1 s'appliquent; en fait les choses deviennent pires parce que des délais plus longs sont possibles ($\delta^2 > 3/4$).

Bibliographie

ASHENFELTER, Orley, How Auctions Work for Art and Wine, *Journal of Economic Perspectives* 3, 1989, 23-36.

Aumann, Robert, Markets with a Continuum of Traders, *Econometrica* 32, 1964, 39–50.

Aumann, Robert, Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality, *Econometrica* 55, 1987, 1-18.

Aumann, Robert, *Lectures on Game Theory*, Underground Classics in Economics, Westview Press, Boulder (CO), 1989.

AUMANN, Robert et Alan Tucker, Contributions to the theory of games 4 (Annals of mathematics studies 40), Princeton University Press, Princeton (NJ), 1957.

AUMANN, Robert et Adam Brandenburger, Epistemic Conditions for Nash Equilibrium, *Econometrica* 63, 1161–1180, 1995.

AXELROD, Robert, *The evolution of cooperation*, Basic Books, New York, 1987.

BARTOLINI, Leonardo et Carlo COTTARELLI, Treasury Bill Auctions: Issues and Uses, dans: M. Blejer et T. Ter-Minassian (éds), *Macroeconomic Dimensions of Public Finance*, Routledge, London 1997, 267-336.

Berlekamp, Elwyn, John Conway et Richard Guy, Winning ways for your mathematical plays, Academic Press, London, 1982.

Bernheim, Douglas, Rationalizable Strategic Behavior, *Econometrica* 52, 1984, 1007-1028.

BIAIS, Bruno et Peter BOSSAERTS, Asset Prices and Volume in a Beauty Contest, Review of Economic Studies 65, 1998, 307-340.

BOLTON, Patrick et Gérard ROLAND, Privatization Policies in Central and Eastern Europe, *Economic Policy* 15, 1992, 276-303.

BOREL, Emile, La théorie du jeu et les équations integrales à noyeau symétrique gauche, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris,

Vol. 173, 1921, 1304-1308.

BOUTIN C. L., Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Mathematics*, Princeton, 1902.

Brandenburger, Adam, and Barry Nalebuff, Co-opetition, Doubleday, New York, 1996.

Chiappori, Pierre-André, Levitt et Grosclause, Testing Mixed-Strategy Equilibria when Players Are Heterogenous: The Case of Penalty Kicks in Soccer, *American Economic Review* 92, 2002, 1138-1151.

COOPER, R., D. Dejong, R. Forsythe et T.W. Ross, Forward Induction in the Battle-of-Sexes Games, *American Economic Review* 83, 1993, 303-1316.

DARWIN, Charles, *The Origin of Species*, London 1859, reprinted by Oxford University Press, Oxford 1996.

Fox, Robert, *The Defense Management Challenge: Weapons Acquisition*, Harvard Business School Press, Cambridge, MA, 1988.

Friedman, J., Game theory with applications to economics, Oxford University Press, New York, 1991.

Friedman, Milton, How to Sell Government Securities, Wall Street Journal August 28, 1991, A8.

FUDENBERG, Drew et David LEVINE, The theory of learning in games, MIT Press, Cambridge (MA), 1998.

FUDENBERG, Drew et Eric MASKIN, The Folk Theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, *Econometrica* 54, 1986, 533-556.

FUDENBERG, Drew and Jean TIROLE, *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, 1991.

GOSWAMI, G. Th. NOE, and M. REBELLO, Collusion in Uniform-Price Auctions: Experimental Evidence and Implications for Treasury Auctions, *Review of Financial Studies* 9, 1996, 757-785.

GROSSMAN Sanford et Oliver HART, Takeover bids, the free-rider problem, and the theory of the corporation, *The Bell Journal of Economics* 11, 1980, 42-64.

HOFBAUER, Josef et Karl Sigmund, Evolutionary games and population dynamics, Cambridge University Press, Cambridge (MA), 2002.

JOST, Peter, Strategisches Konfliktmanagement in Organisationen: Eine spieltheoretische Einführung, Gabler, Wiesbaden, 1998.

Kagel, John and Alvin Roth (éds.), The Handbook of Experimental Economics, Princeton University Press, Princeton 1995.

Kamecke, Ulrich, Competition, Cooperation and Envy in a Simple English Auction, manuscript, Humboldt-Universität Berlin, 1998.

KRUGMAN, Paul and Maurice Obstfeld, *International Economics : Theory and Policy*, Little Brown, New York, 1988.

MAYNARD SMITH, John, Evolution and the theory of games, Cambridge Univ. Press, Cambridge (MA), 1982.

MCAFEE, R. Preston et John McMillan, Analyzing the Airwaves Auction, *Journal of Economic Perspectives* 10, 1996, 159-175.

McKelvey, R. and Andrew McLennan, Computation of Equilibria in Finite Games, dans: H. Amman, D. Kendrick et J. Rust (éds.), *Handbook of Computational Economics*, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1996, 87-142.

MCMILLAN, John, Selling Spectrum Rights, Journal of Economic Perspectives 8, 1994, 145-162.

MOULIN, Hervé, Axioms of cooperative decision making (Econometric Society monographs; 15), Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

MORRIS, Stephen, and Hyun Song Shin, Unique Equilibrium in a Model of Self-Fulfilling Currency Attacks, American Economic Review 88, 1998, 587-597.

NASH, John F., Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics* 54, 1951, 286–295.

OSBORNE, Martin et Ariel RUBINSTEIN, A course in game theory, MIT Press, Cambridge (MA), 1994.

RUBINSTEIN, Ariel, Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica* 50, 1982, 97-109.

Schuster, Peter et Karl Sigmund, Replicator dynamics, *Journal of Theoretical Biology* 100, 1983, 533-538.

Selten, Reinhard, Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit, Zeitschrift Für Die Gesamte Staatswissenschaft 121, 1965, 667-689.

Selten, Reinhard, Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games, *International Journal of Game Theory* 4, 1975, 25-55.

Shaked, Avner et John Sutton, Involuntary Unemployment as a Perfect Equilibrium in a Bargaining Model, *Econometrica*, 52, 1984, 1351-1364.

TAYLOR, Peter et Leo JONKER, Evolutionary stable strategies and game dynamics, *Mathematical Biosciences* 40, 1978, 145-156.

Thepot, Jacques (éd.), Gestion et la théorie des jeux, Vuiget FNEGE, Paris, 1998.

TIROLE, Jean, The theory of industrial organization, MIT Press, Cambridge (MA), 1988.

Umbhauer, Gisèle, *Théorie des jeux appliquée à la gestion*, EMS, Colombelles, 2002.

VAN DER MEULEN, Marten., Louis Victor Allis et Hendrik Jacob van Den Herik, Lithidion: an Awari-playing Program. Technical Report, vol. 90-05, University of Limburg, 1990.

Van Huyck, John, Raymond Battalio, and Richard Beil, Tacit Coordination Games, Strategic Uncertainty, and Coordination Failure, *American Economic Review* 80, 1990, 234-248.

VICKREY, William, Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders, *Journal of Finance* 16, 1961, 8-37.

VIVES, Xavier, Cournot and Bertrand duopoly information equilibrium, *Journal of Economic Theory* 34, 71-94, 1994.

VON NEUMANN, John et Oskar MORGENSTERN, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton (NJ), 1944.

VON STENGEL, Bernhard, Computing Equilibria for Two-Person Games, Technical Report 253, Dept. of Computer Science, ETH Zürich.

Weibull, Jörgen, *Evolutionary game theory*, MIT Press, Cambridge (MA), 1995.

WEINTRAUB, E. Roy (ed.), *Toward a History of Game Theory*, Annual Supplement to Vol. 24, History of Political Economy, Duke University Press, Durham, London 1992.

WILSON, Robert, Auctions of shares, *The Quarterly Journal of Economics* 93, 1979, 675-689.

Index

Α

Action 9, 70, 104, 110, 134, 137, 150, 162, 169 Adéquation Darwinienne (Darwinien fitness) 82, 84, 86, 91 Apprentissage 63 Arbre de jeu 105, 109, 116, 121, 129, 137, 151, 157, 162 Avantages temporaires 10 В Bach ou Stravinsky 14, 22, 26, 30, 84 Banque Centrale Européenne 37 Bataille des sexes 14 \mathbf{C} Concurrence à la Cournot 59, 144, 148, 156, 161 à la Bertrand 18, 30, 59, 161 continu d'agents 72 Coopération 12, 28, 91, 161, 162 D Décision à terme 100 Deep Blue, Deep Fritz 21 Déviation 42, 75, 128, 164 Dilemme du prisonnier 4, 11 22, 30, 60, 84, 91, 101, 139, 149, 161 Dominance 26, 29, 51, 110 stratégie mixte 26

en équilibre 26

Dynamique des réproducteurs 85

```
\mathbf{E}
```

Echecs 2, 3, 19, 59, 100

Effort 16

Egalité 147

Enchère 3, 36, 59, 67

- anglaise 39
- au premier prix 39, 45
- au second prix 39, 45, 52
- discriminatoire 184
- hollandaise 39
- uniforme 184

Ensemble d'information 137, 139

Equilibre de Nash 31, 42, 50, 52, 85, 100, 110, 127, 135, 144, 161, 162

- mixte 66, 70, 76, 93, 155, 171
- parfait 110, 140, 144, 155, 157, 161, 166, 170
- strict 64
- symétrique 75

ESTSFD 29

ESTSSD 52

Extension mixte 58

\mathbf{F}

Finance 2, 3

First mover advantage = avantage du premier coup 11, 128, 132 Forme

- normale 8, 9, 40, 50, 57, 60, 71, 81, 100, 102, 109, 154, 157, 162
- développée 109, 111, 112, 137, 139, 140, 142, 143, 151, 159

Η

Harvard Business School 4

Hospices de Beaune 37

Ι

Index d'intensité 136

Information

- complète 20
- imparfaite 111, 136, 140, 143, 152
- incomplète 145

```
parfaite 101, 105, 109, 129, 143
Interaction 2, 8, 18, 32, 68, 72, 82, 100, 104, 114, 136, 144, 146, 161, 162
Intérêt
     individuel 2, 9, 10, 19
     de groupe 2
Issue 9, 12, 28, 42, 51, 54, 61, 71, 74, 110, 121, 131, 161, 162, 172
Itération 25, 27, 51
J
Jeu 7, 8, 11
     à durée longue 127
     à étapes 121, 123, 143, 152, 154, 157
     à somme nulle 17, 28, 52
     asymétrique 31, 84
     coopératifs 11
     de Nim 187
     de Rubinstein 118
     de société 2, 8, 9, 17, 113
     dynamique 11, 19, 100, 105, 109, 118, 136, 145, 161
     fini 12, 18, 27, 59, 105, 110, 112, 118, 128, 143, 170
     infini 59, 112, 127, 129
     réduit 24, 29, 121, 155
     répété 28, 101, 159
     sans équilibre en stratégies pures 59
     statique 10, 139, 160, 164, 169, 171
     stratégique 39, 82, 102
     symétrique 84
\mathbf{L}
Last mover advantage (= avantage du dernier coup) 119, 132
Μ
Manchester United 67
Marchandage 3, 26, 111, 116
     de Rubinstein 116
Maximin 53
Meilleure réponse 32, 44, 66, 104, 121, 147, 173
```

Mille-pattes de Rosenthal 114

Minimax 169 Mutation 83, 84

Ν

Négociation 103, 107, 118, 132, 141 Non-coopération 12, 13, 91, 100, 168

O

Optimisation 2, 21, 60, 82, 130 Optimum de Pareto 15, 16, 92

Ρ

Paiement 9, 11, 21, 22, 27, 41, 45, 53, 57, 77, 102, 119, 138, 161, 168, 173

Passager clandestin 74

Point stationnaire 90, 91

Poker 2, 8, 52

Pollution 14

Principe d'Optimalité 128, 163

Prudence 31, 51

 \mathbf{R}

Randomisation restreinte 70

Rationalité 2, 160

Récurrence à rebours 110, 112, 127, 137, 140, 143

Règles 8, 9, 20, 40, 62

Répartition 127

Réunion de la commission 22, 26, 30, 84

Ruse 10

S

Schéma action-réaction-réaction 100

Simplex unitaire 88, 90

Solution 2, 22, 25, 50, 77, 117

Sotheby's, Christie's 37

Sous-jeu 112, 127, 140, 141, 146, 166

Stabilité 32, 50, 90, 155

Stratégie 2, 7, 69, 84, 88, 103, 119, 128, 130, 150, 162, 169

- comportementale 82
- continue 31

- de la promesse vide 164
- d'équilibre 30, 119
- dominante 100, 148, 156
- dominée 24, 41, 51, 95
- faiblement dominée 25, 41, 44, 51, 158
- mixte 53, 67, 70, 75, 85, 170
- optimale 3, 85, 129
- pure 51, 59, 61, 67, 70, 75, 84, 91, 92
- prudente 27, 28, 52
- stable (SPRALE) 84, 85
- strictement dominée 22, 23, 41, 45, 51, 60, 65, 159

Surenchère 39

Surprise 10

Système dynamique 90

 \mathbf{T}

Temps 100, 120, 128, 129, 162, 165

Théorème de l'équivalence des revenus 46

Théorème des folk 172

Théorie de la décision 55

U

Utilité 9, 55, 56, 57, 129, 142, 146, 151, 154, 173

V

Vainqueur 39, 44