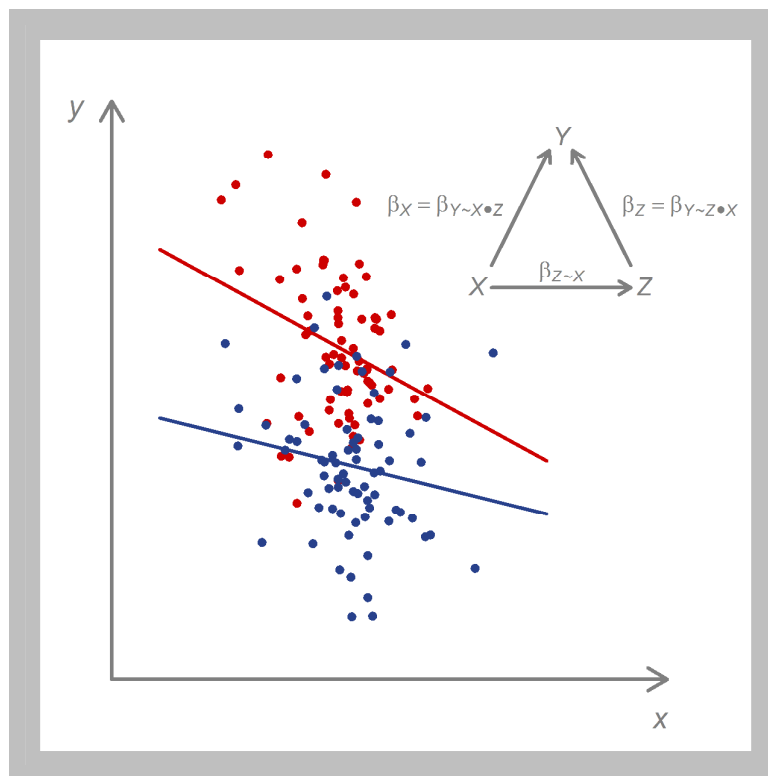


Klausur-Formelsammlung

Statistik 2

Definitionen, Formeln und Sätze



Relevantes aus Statistik 1 + Kap. 8

Empirische Varianz, Standardabweichung, Kovarianz, Korrelation

Empirische Varianz (nichtkorrigiert)

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

Standardabweichung (nichtkorrigiert)

$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}$$

Empirische Kovarianz

$$\tilde{s}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

Empirischer Korrelationskoeffizient

$$r_{XY} = \frac{\tilde{s}_{XY}}{\tilde{s}_X \tilde{s}_Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 \right)}}$$

Alles Rundum um stochastische Unabhängigkeit

Definition 7.1.12: Stochastische Unabhängigkeit und Abhängigkeit

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) X und Y sind **stochastisch unabhängig**.
- (ii) $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f_Y(y) > 0$.
- (iii) $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f_X(x) > 0$.
- (iv) $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Kriterium (iv) ist das sog. **Multiplikationskriterium** gemäß dem sich die gemeinsame Verteilung aus dem Produkt der Randverteilungen ergibt. Trifft eine der vier Aussagen nicht zu, sind X und Y **stochastisch abhängig**.

Definition 7.1.13: Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Zufallsvariablen

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ (diskret oder stetig) sind (**vollständig**) **stochastisch unabhängig**, falls deren gemeinsame Verteilung dem Produkt der eindimensionalen Randverteilungen entspricht, d.h. falls für alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n).$$

Trifft dieses Multiplikationskriterium nicht zu, sind sie **stochastisch abhängig**.

Satz 7.1.5: Funktionen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen

Für gegebene Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ und beliebige (messbare) Funktionen $g_1, g_2, \dots, g_n$ ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) gilt: Sind $X_1, X_2, \dots, X_n$

- (i) stochastisch unabhängig, so auch $g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)$.
- (ii) identisch verteilt, so auch $g_1(X_1), g_1(X_2), \dots, g_1(X_n)$.
- (iii) stochastisch unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.), so auch $g_1(X_1), g_1(X_2), \dots, g_1(X_n)$.

Theoretische Varianz, Standardabweichung, Kovarianz, Korrelation**Definition 7.2.1: Erwartungswert**

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion f_X . Dann ist der Erwartungswert von X definiert als

- (i) $\mu_X = E(X) = \sum_j a_j P(X = a_j) = \sum_j a_j f_X(a_j)$
für diskretes X mit Realisationsmöglichkeiten $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ und
- (ii) $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
für stetiges X .

Definition 7.2.2: Theoretische Varianz und Standardabweichung

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X) = \mu_X$. Dann ist die (**theoretische**) **Varianz** von X definiert als

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - \mu_X^2 \quad (7.2.15)$$

und die (**theoretische**) **Standardabweichung** als

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}.$$

Erwartungswerte von Summen

$$E(c_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n) = c_0 + c_1E(X_1) + c_2E(X_2) + \dots + c_nE(X_n)$$

Varianzen von Summen bei Unabhängigkeit (und Unkorreliertheit)

$$Var(c_0 + c_1X_1 + \dots + c_nX_n) = c_1^2Var(X_1) + \dots + c_n^2Var(X_n)$$

Satz 7.2.4: Multiplikationsregel bei Unabhängigkeit (und Unkorreliertheit)

Für n (vollständig) unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ (diskret oder stetig) gilt die **Multiplikationsregel** gemäß

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n).$$

Speziell folgt daraus für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y :

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y). \quad (7.2.14)$$

Die Multiplikationsregel gilt auch bei **Unkorreliertheit** (Abschnitt 7.2.2).

Satz 7.2.7: Regeln bei iterierter Erwartungswertbildung

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig). Dann gilt:

- (i) $E(Y) = E[E(Y|X)]$.
- (ii) $Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]$.

Erwartungswerte und Varianzen von Summen und Mittelwerten

Für n Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu_i$ und $Var(X_i) = \sigma_i^2$ für $i = 1, \dots, n$ gelten folgende Aussagen allgemein bzw. bei Vorliegen von identischen Erwartungswerten bzw. Varianzen:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{bzw.} \quad E(S_n) = n\mu, \quad (7.4.14)$$

$$E(\bar{X}_n) = \bar{\mu}_n \quad \text{bzw.} \quad E(\bar{X}_n) = \mu, \quad (7.4.15)$$

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j), \quad (7.4.16)$$

d.h. speziell für $n = 2$:

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2).$$

Sind $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert, so gilt:

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad \text{bzw.} \quad Var(S_n) = n\sigma^2, \quad (7.4.17)$$

$$Var(\bar{X}_n) = \sigma_n^2/n \quad \text{bzw.} \quad Var(\bar{X}_n) = \sigma^2/n. \quad (7.4.18)$$

Insbesondere gelten die letzten Resultate in (7.4.14), (7.4.15), (7.4.17) und (7.4.18), falls $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.) sind.

Definition 7.2.5: Theoretische Kovarianz und Korrelation

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig) mit

$$E(X) = \mu_X, \text{Var}(X) = \sigma_X^2, E(Y) = \mu_Y, \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2.$$

Dann ist die (theoretische) Kovarianz zwischen X und Y definiert als

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X\mu_Y \quad (7.2.28)$$

und der (theoretische) Korrelationskoeffizient als

$$\varrho_{XY} = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Dabei gilt: $\varrho_{XY} \in [-1, 1]$.

Wichtige Transformationseigenschaften theoretischer Kennwerte

Für Erwartungswert, Varianz, Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen gelten folgende Transformationsregeln:

- (1) $E(X + c) = E(X) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (2) $E(cX) = cE(X)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (3) $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (4) $\text{Var}(cX) = c^2\text{Var}(X)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (5) $\sqrt{\text{Var}(cX)} = c\sqrt{\text{Var}(X)}$ für jedes $c > 0$.
- (6) $\text{Cov}(X + c_X, Y + c_Y) = \text{Cov}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$.
- (7) $\text{Corr}(X + c_X, Y + c_Y) = \text{Corr}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$.
- (8) $\text{Cov}(c_X X, c_Y Y) = c_X c_Y \text{Cov}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$.
- (9) $\text{Corr}(c_X X, c_Y Y) = \text{Corr}(X, Y)$ für alle ~~$c_X, c_Y \neq 0$~~ $c_X > 0, c_Y > 0$.

Insbesondere folgen daraus die zu den entsprechenden empirischen Kennwerten völlig analogen Äquivarianz- und Invarianzeigenschaften in Bezug auf Verschiebungen und Umskalierungen.

Einige spezielle Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **Bernoulli-verteilt** mit Parameter $\pi \in (0, 1)$, kurz $X \sim B(1, \pi)$, wenn gilt:

$$P(X = 0) = 1 - \pi \quad \text{und} \quad P(X = 1) = \pi.$$

Die korrespondierende Verteilung heißt **Bernoulli-Verteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \pi \quad \text{und} \quad Var(X) = \pi(1 - \pi).$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable S_n heißt **binomialverteilt** mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in (0, 1)$, kurz $S_n \sim B(n, \pi)$, wenn gilt:

$$P(S_n = s) = \binom{n}{s} \pi^s (1 - \pi)^{n-s} \quad \text{für } s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Die korrespondierende Verteilung heißt **Binomialverteilung**. Dabei gilt:

$$E(S_n) = n\pi \quad \text{und} \quad Var(S_n) = n\pi(1 - \pi).$$

Poisson-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **poissonverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, kurz $X \sim Po(\lambda)$, wenn gilt:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad \text{für } x = 0, 1, 2, \dots$$

Die korrespondierende Verteilung heißt **Poisson-Verteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \lambda \quad \text{und} \quad Var(X) = \lambda.$$

Stetige Gleichverteilung

Für $a < b$ heißt eine Zufallsvariable X auf $[a, b]$ **stetig gleichverteilt**, kurz $X \sim G(a, b)$, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

besitzt. Die korrespondierende Verteilung heißt **stetige Gleichverteilung** oder **Rechteckverteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponentialverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, kurz $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0, \infty)}(x)$$

besitzt. Die korrespondierende Verteilung heißt **Exponentialverteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Zusammenfassung für die Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, kurz $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

besitzt. Speziell heißt die $N(0, 1)$ -Verteilung auch **Standardnormalverteilung**. Mit φ bezeichnen wir die Dichte der Standardnormalverteilung. Für die Verteilungsfunktion F_X einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet, deren Werte aus Verteilungstabellen (vgl. A.1) abgelesen werden können. Außerdem gilt:

$$q_\alpha = \mu + \sigma \cdot z_\alpha,$$

wobei q_α das theoretische α -Quantil einer $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung und z_α das theoretische α -Quantil der $N(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet.

Asymptotische Sätze

Satz 7.4.1: Schwaches GGZ für u.i.v. Zufallsvariablen

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für jedes $c > 0$:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{bzw.} \quad P(|\bar{X}_n - \mu| > c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Man sagt, das (stochastische) Mittel **konvergiert stochastisch** (nach **Wahrscheinlichkeit**) gegen μ . Dafür schreibt man auch kurz

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu.$$

Satz 7.4.2: Satz von Bernoulli

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt und sei $A \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges (messbares) Ereignis. Definiere

$$Y_i = I_A(X_i) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Dann sind $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig $B(1, \pi)$ -verteilt mit $\pi = P(X_i \in A)$, und die (stochastische) relative Häufigkeit des Ereignisses A konvergiert stochastisch gegen die Wahrscheinlichkeit von A , d.h.

$$\bar{Y}_n \xrightarrow{P} P(A).$$

Satz 7.4.3: Zentraler Grenzwertsatz nach Lindeberg-Lévy

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$ mit $0 < \sigma^2 < \infty$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \text{ asymptotisch } N(0, 1)\text{-verteilt,} \quad (7.4.30)$$

d.h.

$$P(Z_n \leq x) = F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}, \quad (7.4.31)$$

wobei F_{Z_n} die Verteilungsfunktion von Z_n und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Wir schreiben dafür auch kurz

$$Z_n \stackrel{a}{\sim} N(0, 1). \quad (7.4.32)$$

Summe und Mittelwert sind damit für großes n **approximativ normalverteilt**. Konkret gelten folgende Approximationen:

$$S_n \stackrel{approx}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2), \quad (7.4.33)$$

$$\bar{X}_n \stackrel{approx}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n), \quad (7.4.34)$$

Als **Daumenregel** verwenden wir $n \geq 30$ gilt als „groß“.

Satz 7.4.4: Grenzwertsatz nach de Moivre

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $B(1, \pi)$ -verteilt. Dann gilt:

$$Z_n = \frac{S_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{\bar{X}_n - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1), \quad (7.4.36)$$

$$S_n \stackrel{approx}{\sim} N(n\pi, n\pi(1-\pi)) \text{ für großes } n \text{ und} \quad (7.4.37)$$

$$\bar{X}_n \stackrel{approx}{\sim} N(\pi, \pi(1-\pi)/n) \text{ für großes } n. \quad (7.4.38)$$

Stochastische Konvergenz

Definition 8.2.2: Stochastische Konvergenz (gegen feste Werte)

Sei (Y_n) eine Folge von Zufallsvariablen. Sofern für einen festen Wert θ und jedes $c > 0$

$$P(|Y_n - \theta| \leq c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{bzw.} \quad P(|Y_n - \theta| > c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt, sagen wir, dass Y_n **stochastisch (nach Wahrscheinlichkeit) gegen θ konvergiert** und schreiben dafür auch kurz

$$Y_n \xrightarrow{p} \theta.$$

Satz 8.2.3: Stetigkeitssatz

Sei (Y_n) eine Folge von Zufallsvariablen, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und θ ein fester Wert. Sofern $h(\theta)$ definiert ist und gilt

$$Y_n \xrightarrow{p} \theta,$$

folgt daraus für $U_n = h(Y_n)$:

$$U_n \xrightarrow{p} h(\theta) \quad \text{bzw.} \quad h(Y_n) \xrightarrow{p} h(\theta).$$

Satz 8.2.4: GGZ für k -te Momente

Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. mit $E(X_i^k) < \infty$. Dann folgt daraus

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^m \xrightarrow{p} E(X_i^m) \quad \text{für } m \leq k, \text{ wobei } k, m \in \mathbb{N}.$$

Multivariate Abhängigkeiten

Definition 8.3.1: Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Zufallsvektoren

Zwei Zufallsvektoren (diskret oder stetig)

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_q)^T$$

sind **stochastisch unabhängig**, falls sich deren gemeinsame Verteilung aus dem Produkt der Randverteilungen ergibt, d.h. falls gilt

$$f_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}} = f_{\mathbf{X}} f_{\mathbf{Y}}.$$

Anderenfalls sind sie **stochastisch abhängig**.

Satz 8.3.1: Funktionen von unabhängigen Zufallsvektoren

Für gegebene Zufallsvektoren (diskret oder stetig)

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T \text{ und } \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_q)^T$$

und beliebige (messbare) Funktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r \text{ und } g_2 : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$$

gilt: Sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$

- (i) stochastisch unabhängig, so sind auch $g_1(\mathbf{X})$ und $g_2(\mathbf{Y})$ stochastisch unabhängig.
- (ii) identisch verteilt, so sind auch $g_1(\mathbf{X})$ und $g_1(\mathbf{Y})$ identisch verteilt.
- (iii) stochastisch unabhängig und identisch verteilt, so sind auch $g_1(\mathbf{X})$ und $g_1(\mathbf{Y})$ unabhängig und identisch verteilt.

Sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ gemeinsam normalverteilt, so sind Unkorreliertheit und Unabhängigkeit äquivalent.

Statistisches Schätzen

Erwartungstreue

Definition 10.1.1: Erwartungstreue und Verzerrung

Ein Schätzer $\hat{\theta}$ heißt **erwartungstreu** für θ , falls

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

für jeden zulässigen Wert θ gilt. Anderenfalls spricht man von einem **verzerrten** Schätzer. Die **Verzerrung** (engl. *Bias*) ist dabei definiert als

$$Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

Ein Schätzer heißt **asymptotisch erwartungstreu**, falls gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Satz 10.1.1: Erwartungstreue Schätzung von Erwartungswert und theoretischer Varianz

Seien $X_1, \dots, X_n$ identisch verteilte Stichprobenvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Weiter seien das Stichprobenmittel bzw. die korrigierte Stichprobenvarianz

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Dann gilt:

$$E(\hat{\mu}) = \mu, \tag{10.1.11}$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, \text{ falls } X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig sind.} \tag{10.1.12}$$

Satz 10.1.2: Erwartungstreue Schätzung von Mittelwert und empirischer Varianz bei realer Grundgesamtheit (Urnenmodell)

Gegeben sei eine Urne mit $N \geq 1$ Kugeln, die mit Zahlen $z_1, \dots, z_N$ beschriftet sind. Sei $\mu = \bar{z}$ das arithmetische Mittel aller Zahlen und $\sigma^2 = \tilde{s}_Z^2$ die empirische Varianz. Es werden $n \geq 1$ Kugeln zufällig gezogen und die gezogenen Zahlen mit den Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$ modelliert. Dann gilt:

$$E(\bar{X}) = \mu = \bar{z}, \text{ falls mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird,} \tag{10.1.13}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 = \tilde{s}_Z^2, \text{ falls mit Zurücklegen gezogen wird.} \tag{10.1.14}$$

Bemerkung: Für das Ziehen ohne Zurücklegen in (10.1.13) wird implizit $N \geq n$ vorausgesetzt.

Erwartete quadratische Abweichung (MSE)

Definition 10.1.2: Erwartete quadratische Abweichung (MSE)

Gegeben sei ein Schätzer $\hat{\theta}$ für einen Parameter θ . Die **erwartete quadratische Abweichung**, die auch als MSE (engl. *Mean Squared Error*) bezeichnet wird, ist definiert als

$$MSE(\hat{\theta}) = E([\hat{\theta} - \theta]^2) = Var(\hat{\theta}) + (Bias(\hat{\theta}))^2.$$

Konsistenz

Definition 10.1.3: MSE-Konsistenz und schwache Konsistenz

Ein Schätzer $\hat{\theta}_n$ für einen Parameter θ heißt

(i) **MSE-konsistent**, falls gilt:

$$MSE(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(ii) **schwach konsistent**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{bzw.} \quad P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

in Kurzschreibweise: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$.

MSE-Konsistenz impliziert schwache Konsistenz.
Die Umkehrung gilt nicht.

Satz 10.1.3: Konsistente Schätzung von Funktionen eines Parameters

Ist $\hat{\theta}_n$ ein schwach konsistenter Schätzer für einen Parameter θ und g eine stetige Funktion, dann ist $g(\hat{\theta}_n)$ ein schwach konsistenter Schätzer für $g(\theta)$, sofern $g(\theta)$ definiert ist.

Ein erwartungstreuer oder asymptotisch erwartungstreuer Schätzer ist genau dann MSE-konsistent, falls dessen Varianz für wachsendes n gegen Null konvergiert.

Schwache Konsistenz lässt sich, sofern vorhanden,

1. über die stärkere Form der MSE-Konsistenz,
2. anhand asymptotischer Resultate (GGZ + Stetigkeitssatz) oder
3. direkt anhand der Definition

nachweisen.

Satz 10.1.4: Konsistente Schätzung von Erwartungswert und Varianz

Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 und $E(X_i^4) < \infty$. Dann gilt:

- (i) Das Stichprobenmittel $\bar{X}$ ist ein MSE-konsistenter und schwach konsistenter Schätzer für μ .
- (ii) Die korrigierte (nichtkorrigierte) Stichprobenvarianz S^2 ($\tilde{S}^2$) ist ein MSE-konsistenter und schwach konsistenter Schätzer für σ^2 .

Intervallschätzung

Satz 10.2.1: Konfidenzintervalle für Erwartungswerte

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$. Dann ist ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für μ , falls

- (i) $X_1, \dots, X_n$ normalverteilt sind mit bekannter Varianz, gegeben durch
$$[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}],$$
- (ii) $X_1, \dots, X_n$ normalverteilt sind mit unbekannter Varianz, gegeben durch
$$[\bar{X} - t_{n-1, 1-\alpha/2}\sqrt{S^2/n}, \bar{X} + t_{n-1, 1-\alpha/2}\sqrt{S^2/n}],$$
- (iii) n groß ist und die Varianz bekannt ist, gegeben durch
$$[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}],$$
- (iv) n groß ist und die Varianz unbekannt ist, gegeben durch
$$[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\tilde{S}^2/n}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\tilde{S}^2/n}].$$

In den Fällen (iii) und (iv) handelt es sich um approximative Konfidenzintervalle für $n \geq 30$. In (iv) kann sowohl die nichtkorrigierte als auch die korrigierte Stichprobenvarianz verwendet werden.

Notwendiger Stichprobenumfang zur Erzielung bestimmter Intervalllängen

$$n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}\sigma}{L_Z} \right)^2$$

Satz 10.2.2: Konfidenzintervalle für Erwartungswertdifferenzen

Gegeben seien $n = n_0 + n_1$ unabhängige Stichprobenvariablen

$$Y_{01}, Y_{02}, \dots, Y_{0n_0} \quad \text{und} \quad Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1},$$

die innerhalb der beiden Gruppen jeweils identisch verteilt sind mit

$$E(Y_{0i}) = \mu_0, \quad \text{Var}(Y_{0i}) = \sigma_0^2 \quad \text{mit } 0 < \sigma_0^2 < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, n_0,$$

$$E(Y_{1i}) = \mu_1, \quad \text{Var}(Y_{1i}) = \sigma_1^2 \quad \text{mit } 0 < \sigma_1^2 < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, n_1.$$

Dann ist ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_0$, falls

- (i) alle Variablen normalverteilt sind mit bekannten Varianzen, gegeben durch

$$\left[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}, \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \right],$$

- (ii) alle Variablen normalverteilt sind mit unbekannter gleicher Varianz ($\sigma_0^2 = \sigma_1^2$, homoskedastischer Fall), gegeben durch

$$\left[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - t_{n_0+n_1-2, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_p^2}{n_0} + \frac{S_p^2}{n_1}}, \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 + t_{n_0+n_1-2, 1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_p^2}{n_0} + \frac{S_p^2}{n_1}} \right]$$

mit $S_p^2 = \frac{1}{n_0 + n_1 - 2} (n_0 \tilde{S}_0^2 + n_1 \tilde{S}_1^2),$

- (iii) n_0 und n_1 groß sind, Annahme (B) von Definition 8.2.1 und die Bedingung

$$\frac{n_1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \in (0, 1)$$

erfüllt und die Varianzen bekannt sind, gegeben durch

$$\left[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}, \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n_0} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}} \right],$$

- (iv) die Varianzen unbekannt und sonst alle Annahmen von (iii) erfüllt sind, gegeben durch

$$\left[\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{S}_0^2}{n_0} + \frac{\tilde{S}_1^2}{n_1}}, \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{S}_0^2}{n_0} + \frac{\tilde{S}_1^2}{n_1}} \right].$$

In den Fällen (iii) und (iv) handelt es sich um approximative Konfidenzintervalle für $n_0, n_1 \geq 30$. Hierzu beachte man, dass Annahme (B) erfüllt ist, sofern die Trägermengen der Verteilungen der beiden Gruppen beschränkt sind. Außerdem können im Fall (iv) sowohl nichtkorrigierte als auch korrigierte Stichprobenvarianzen verwendet werden.

Satz 10.2.3: Konfidenzintervalle für Anteilswerte

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $B(1, \pi)$ -verteilt mit $0 < \pi < 1$ und $n \geq 30$. Dann ist ein approximatives $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für π gegeben durch

$$\left[\hat{\pi} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}, \hat{\pi} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} \right].$$

Dabei ist $\hat{\pi} = \bar{X}$ die relative Häufigkeit der Einsen in der Stichprobe.

Notwendiger Stichprobenumfang zur Erzielung bestimmter Genauigkeiten

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{L_{\hat{\pi}}^{max}} \right)^2$$

Konfidenzintervalle für Anteilswertdifferenzen

$$\left[\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_0 - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}_0(1-\hat{\pi}_0)}{n_0} + \frac{\hat{\pi}_1(1-\hat{\pi}_1)}{n_1}}, \right. \\ \left. \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_0 + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}_0(1-\hat{\pi}_0)}{n_0} + \frac{\hat{\pi}_1(1-\hat{\pi}_1)}{n_1}} \right]$$

Statistisches Testen

Einige Grundlagen

Definition 11.2.2: Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art

Unter einer **Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art** (auch **Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art**) eines Tests versteht man eine Wahrscheinlichkeit, sich für H_1 zu entscheiden, falls ein bestimmter Wert aus H_0 zutrifft.

Definition 11.2.3: Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art

Unter einer **Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art** (auch **Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art**) eines Tests versteht man eine Wahrscheinlichkeit, H_0 beizubehalten, falls ein bestimmter Wert aus H_1 zutrifft.

Definition 11.2.5: Gütefunktion und Güte

Gegeben sei ein parametrischer Test bezüglich eines Parameters θ . Dann bezeichnet man die Funktion g mit

$$g(\theta) = P(\text{Verwerfung von } H_0 | \theta)$$

als **Gütefunktion** des Tests. Für jeden Wert θ aus H_1 wird $g(\theta)$ als **Güte** oder **Macht** des Tests an der Stelle θ bezeichnet.

$$\text{Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art} = 1 - \text{Güte}$$

Satz 11.2.1: Gütefunktionen des Gauß-Tests

Die Gütefunktion des Gauß-Tests ist im Falle des Testproblems

- (a) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$ gegeben durch

$$g(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha} - \frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right),$$

- (b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ gegeben durch

$$g(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha} + \frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right),$$

- (c) $H_0 : \mu \overset{=}{\leq} \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \overset{\neq}{>} \mu_0$ gegeben durch

$$g(\mu) = \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} - \frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) + \Phi\left(-z_{1-\alpha/2} + \frac{\mu - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

Definition 11.2.6: p -Wert

Der **p-Wert** ist das ex post ermittelte Testniveau, zu dem H_0 für die vorliegenden Daten gerade noch verworfen werden könnte.

Berechnung von p -Werten

Sei t die Realisierung der Teststatistik eines Tests und die Zufallsvariable T entsprechend der Testverteilung des Tests verteilt. Für die in diesem Lehrbuch besprochenen Tests gelten die folgenden Berechnungsformeln: Ist der Test ein

- a) unterer einseitiger Test, der für kleine Werte der Teststatistik ablehnt, dann berechnet sich der p -Wert als $P(T \leq t)$.
- b) oberer einseitiger Test, der für große Werte der Teststatistik ablehnt, dann berechnet sich der p -Wert als $P(T \geq t)$.
- c) zweiseitiger Test, der für betragsmäßig große Werte der Teststatistik ablehnt, und die Testverteilung symmetrisch um 0, dann berechnet sich der p -Wert als $P(|T| \geq |t|)$.

Tests über Erwartungswerte

Satz 11.3.1: Tests über Erwartungswerte

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert μ und Varianz $0 < \sigma^2 < \infty$. Gegeben seien folgende Testprobleme über μ :

- a) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$,
- b) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$,
- c) $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Dann basieren die Entscheidungsregeln eines Tests zum Niveau α , falls

- (i) $X_1, \dots, X_n$ normalverteilt sind mit bekannter Varianz, auf dem Resultat

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1) \quad \text{für } \mu = \mu_0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $z < -z_{1-\alpha}$,
- b), falls $z > z_{1-\alpha}$,
- c), falls $|z| > z_{1-\alpha/2}$, d.h. $z < -z_{1-\alpha/2}$ oder $z > z_{1-\alpha/2}$.

(ii) $X_1, \dots, X_n$ normalverteilt sind mit unbekannter Varianz, auf dem Resultat

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1) \quad \text{für } \mu = \mu_0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

a), falls $t < -t_{n-1, 1-\alpha}$,

b), falls $t > t_{n-1, 1-\alpha}$,

c), falls $|t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$, d.h. $t < -t_{n-1, 1-\alpha/2}$ oder $t > t_{n-1, 1-\alpha/2}$.

(iii) n groß und die Varianz bekannt ist, auf dem Resultat

$$Z \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \mu = \mu_0$$

und sind identisch zu denen in (i),

(iv) n groß und die Varianz unbekannt ist, auf dem Resultat

$$T \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \mu = \mu_0$$

und sind identisch zu denen in (i), wobei mit z durch t zu ersetzen ist.

Die Tests in (i) werden als **Gauß-Tests** und die Tests in (ii) als **t-Tests** bezeichnet. In den Fällen (iii) und (iv) handelt es sich um **approximative Gauß-Tests**, die man für $n \geq 30$ anwenden kann. Anstelle der korrigierten Stichprobenvarianz kann in Fall (iv) auch die nichtkorrigierte verwendet werden.

Allgemeine Merkregel via Standardfehler

(Schätzwert – Hypothetischer Wert) / (geschätzter) Standardfehler.

Tests über Erwartungswertdifferenzen

Satz 11.3.2: Tests über Erwartungswertdifferenzen

Gegeben seien $n = n_0 + n_1$ unabhängige Stichprobenvariablen

$$Y_{01}, Y_{02}, \dots, Y_{0n_0} \quad \text{und} \quad Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1},$$

die innerhalb der beiden Gruppen jeweils identisch verteilt sind mit

$$E(Y_{0i}) = \mu_0, \quad \text{Var}(Y_{0i}) = \sigma_0^2 \quad \text{mit } 0 < \sigma_0^2 < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, n_0,$$

$$E(Y_{1i}) = \mu_1, \quad \text{Var}(Y_{1i}) = \sigma_1^2 \quad \text{mit } 0 < \sigma_1^2 < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, n_1.$$

Gegeben seien folgende Testprobleme über $\mu_1 - \mu_0$:

a) $H_0 : \mu_1 - \mu_0 \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_0 < \delta_0$,

b) $H_0 : \mu_1 - \mu_0 \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_0 > \delta_0$,

c) $H_0 : \mu_1 - \mu_0 = \delta_0$ vs. $H_1 : \mu_1 - \mu_0 \neq \delta_0$.

Dann basieren die Entscheidungsregeln eines Tests zum Niveau α , falls

- (i) alle Variablen normalverteilt sind mit bekannten Varianzen, auf dem Resultat

$$Z_D = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - \delta_0}{\sqrt{\sigma_0^2/n_0 + \sigma_1^2/n_1}} \sim N(0, 1) \quad \text{für } \mu_1 - \mu_0 = \delta_0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $z_D < -z_{1-\alpha}$,
- b), falls $z_D > z_{1-\alpha}$,
- c), falls $|z_D| > z_{1-\alpha/2}$, d.h. $z_D < -z_{1-\alpha/2}$ oder $z_D > z_{1-\alpha/2}$.

- (ii) alle Variablen normalverteilt sind mit unbekannter, homoskedastischer Varianz ($\sigma_0^2 = \sigma_1^2$), auf dem Resultat

$$\tilde{T}_D = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - \delta_0}{\sqrt{S_p^2/n_0 + S_p^2/n_1}} \sim t(n_0 + n_1 - 2) \quad \text{für } \mu_1 - \mu_0 = \delta_0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $\tilde{t}_D < -t_{n_0+n_1-2, 1-\alpha}$,
- b), falls $\tilde{t}_D > t_{n_0+n_1-2, 1-\alpha}$,
- c), falls $|\tilde{t}_D| > t_{n_0+n_1-2, 1-\alpha/2}$.

- (iii) n_0 und n_1 groß sind, Annahme (B) von Definition 8.2.1 und die Bedingung

$$n_1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \in (0, 1)$$

gelten und die Varianzen bekannt sind, auf dem Resultat

$$Z_D \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \mu_1 - \mu_0 = \delta_0$$

und sind identisch, wie die in (i).

- (iv) die Varianzen unbekannt und sonst alle Annahmen von (iii) erfüllt sind, auf dem Resultat

$$\hat{T}_D = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_0 - \delta_0}{\sqrt{\tilde{S}_0^2/n_0 + \tilde{S}_1^2/n_1}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \mu_1 - \mu_0 = \delta_0$$

und lauten wie in (i), wobei z_D durch $\hat{t}_D$ zu ersetzen ist.

Die Tests in (i) werden hier als **Gauß-Tests über Erwartungswertdifferenzen**, die Tests in (ii) als **t-Tests über Erwartungswertdifferenzen** bezeichnet. In den Fällen (iii) und (iv) handelt es sich um **approximative Gauß-Tests über Erwartungswertdifferenzen**, die für $n_0, n_1 \geq 30$ anwendbar sind. Hierzu beachte man, dass Annahme (B) erfüllt ist, sofern die Trägermengen der Verteilungen der beiden Gruppen beschränkt sind. Außerdem können in Fall (iv) sowohl nichtkorrigierte als auch korrigierte Stichprobenvarianzen verwendet werden.

Formel für die „gepoolte“ Varianzschätzung

$$S_p^2 = \frac{1}{n_0 + n_1 - 2} (n_0 \tilde{S}_0^2 + n_1 \tilde{S}_1^2) = \frac{1}{n_0 + n_1 - 2} ((n_0 - 1) S_0^2 + (n_1 - 1) S_1^2)$$

Nichtparametrische Chiquadrat-Tests

Satz 11.3.3: χ^2 -Anpassungstest

Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. wie X verteilt, wobei X diskret verteilt sei mit Trägermenge $T_X = \{1, \dots, k\}$ und $k \geq 2$. Gegeben sei folgendes Testproblem:

$$H_0 : P(X = i) = \pi_i \text{ für jedes } i \in T_X \text{ vs.}$$

$$H_1 : P(X = i) \neq \pi_i \text{ für mindestens ein } i \in T_X.$$

Dann basiert die Entscheidungsregel eines Tests zum Niveau α auf dem Resultat

$$\chi_A^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} \stackrel{a}{\sim} \chi^2(k-1) \text{ unter } H_0,$$

wobei N_i die absolute Häufigkeit der Ausprägung i ist, und lautet:

$$\text{Verwerfe } H_0, \text{ falls } \chi_A^2 > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2, \text{ und sonst nicht.}$$

Der Test ist anwendbar, falls $n\pi_i \geq 5$ für $i = 1, \dots, k$. Ferner kann X auch eine kategorisierte (diskretisierte) Zufallsvariable sein.

Satz 11.3.4: χ^2 -Unabhängigkeitstest

Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ u.i.v. wie (X, Y) , wobei (X, Y) diskret verteilt ist mit Trägermenge $T_{XY} = \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$, wobei $k, l \geq 2$. Gegeben sei folgendes Testproblem:

$$H_0 : P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) \text{ für alle } (i, j) \in T_{XY} \text{ vs.}$$

$$H_1 : P(X = i, Y = j) \neq P(X = i)P(Y = j) \text{ für mindestens ein } (i, j) \in T_{XY}.$$

Dann basiert die Entscheidungsregel eines Tests zum Niveau α auf dem Resultat

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(N_{ij} - \frac{N_{i\bullet} \cdot N_{\bullet j}}{n})^2}{\frac{N_{i\bullet} \cdot N_{\bullet j}}{n}} \stackrel{a}{\sim} \chi^2((k-1)(l-1)) \text{ unter } H_0.$$

Dabei lehnt sich die Notation an diejenige für Kontingenztabellen an. Die Entscheidungsregel lautet dann:

$$\text{Verwerfe } H_0, \text{ falls } \chi^2 > \chi_{(k-1)(l-1), 1-\alpha}^2 \text{ und sonst nicht.}$$

Der Test ist anwendbar, falls

$$\frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} \geq 5 \quad \text{für alle } (i, j) \in T_{XY}.$$

Ferner können X und Y auch kategorisierte (diskretisierte) Zufallsvariablen sein.

Vereinfachungsformel in 2x2-Tabellen

$$\chi^2 = \frac{n(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21})^2}{N_{\bullet 1}N_{\bullet 2}N_{1\bullet}N_{2\bullet}}$$

Satz 11.3.5: Approximativer Binomialtest

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $B(1, \pi)$ -verteilt mit $0 < \pi < 1$. Gegeben seien folgende Testprobleme:

- a) $H_0 : \pi \geq \pi_0$ vs. $H_1 : \pi < \pi_0$,
- b) $H_0 : \pi \leq \pi_0$ vs. $H_1 : \pi > \pi_0$,
- c) $H_0 : \pi = \pi_0$ vs. $H_1 : \pi \neq \pi_0$,

Dann basieren die Entscheidungsregeln eines Tests zum Niveau α , falls n groß ist, auf dem Resultat

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \pi = \pi_0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $z < -z_{1-\alpha}$,
- b), falls $z > z_{1-\alpha}$,
- c), falls $|z| > z_{1-\alpha/2}$, d.h. $z < -z_{1-\alpha/2}$ oder $z > z_{1-\alpha/2}$.

Dabei ist $\hat{\pi}$ der Anteil von Einsen in der Stichprobe. Der Test wird als **approximativer Binomialtest** bezeichnet und ist für $n \geq 30$ anwendbar.

Satz 11.3.6: Approximativer Binomialtest über eine Anteilswertdifferenz

Gegeben seien $n = n_0 + n_1$ unabhängige Stichprobenvariablen

$$Y_{01}, Y_{02}, \dots, Y_{0n_0} \quad \text{und} \quad Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1},$$

die innerhalb der beiden Gruppen jeweils identisch verteilt sind mit

$$Y_{0i} \sim B(1, \pi_0) \quad \text{mit } 0 < \pi_0 < 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n_0,$$

$$Y_{1i} \sim B(1, \pi_1) \quad \text{mit } 0 < \pi_1 < 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n_1.$$

Gegeben seien folgende Testprobleme über $\pi_1 - \pi_0$:

- a) $H_0 : \pi_1 - \pi_0 \geq \delta_0$ vs. $H_1 : \pi_1 - \pi_0 < \delta_0$,
- b) $H_0 : \pi_1 - \pi_0 \leq \delta_0$ vs. $H_1 : \pi_1 - \pi_0 > \delta_0$,
- c) $H_0 : \pi_1 - \pi_0 = \delta_0$ vs. $H_1 : \pi_1 - \pi_0 \neq \delta_0$.

Dann basieren die Entscheidungsregeln eines Tests zum Niveau α , falls n_0 und n_1 groß und die Bedingung

$$n_1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \in (0, 1)$$

erfüllt sind, auf dem Resultat

$$\hat{T}_D = \frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_0 - \delta_0}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_0(1-\hat{\pi}_0)}{n_0} + \frac{\hat{\pi}_1(1-\hat{\pi}_1)}{n_1}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \pi_1 - \pi_0 = \delta_0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $\hat{t}_D < -z_{1-\alpha}$,
- b), falls $\hat{t}_D > z_{1-\alpha}$,
- c), falls $|\hat{t}_D| > z_{1-\alpha/2}$, d.h. $\hat{t}_D < -z_{1-\alpha/2}$ oder $\hat{t}_D > z_{1-\alpha/2}$,

Dabei sind

$$\hat{\pi}_0 = \bar{Y}_0 \quad \text{und} \quad \hat{\pi}_1 = \bar{Y}_1$$

die Anteile von Einsen in den jeweiligen Gruppen. Der Test wird hier als **approximativer Binomialtest über eine Anteilswertdifferenz** bezeichnet und ist für $n_0, n_1 \geq 30$ anwendbar.

Satz 11.3.7: Test über eine Anteilswertdifferenz $\delta_0 = 0$

Gegeben seien die Voraussetzungen und Testprobleme von Satz 11.3.6. Dann basieren die Entscheidungsregeln für $\delta_0 = 0$ auf dem Resultat

$$\tilde{T}_D = \frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_0}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n_0} + \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n_1}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{mit} \quad \hat{\pi} = \frac{1}{n}(n_0\hat{\pi}_0 + n_1\hat{\pi}_1).$$

Der approximative Binomialtest über „ $H_0 : \pi_1 - \pi_0 = 0$ “ ist äquivalent zu einem entsprechenden χ^2 -Homogenitätstest.

Satz 11.3.8: Korrelationstest

Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängig gemeinsam normalverteilt und ϱ_{XY} die theoretische Korrelation zwischen X_i und Y_i , d.h.

$$\varrho_{XY} = \text{Corr}(X_i, Y_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n.$$

Gegeben seien folgende Testprobleme über ϱ_{XY} :

- a) $H_0 : \varrho_{XY} \geq 0$ vs. $H_1 : \varrho_{XY} < 0$,
- b) $H_0 : \varrho_{XY} \leq 0$ vs. $H_1 : \varrho_{XY} > 0$,
- c) $H_0 : \varrho_{XY} = 0$ vs. $H_1 : \varrho_{XY} \neq 0$.

Dann basieren die Entscheidungsregeln eines Tests zum Niveau α auf dem Resultat

$$T_R = \frac{R_{XY}}{\sqrt{1 - R_{XY}^2}} \sqrt{n-2} \sim t(n-2) \quad \text{für} \quad \varrho_{XY} = 0$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $t_R < -t_{n-2, 1-\alpha}$,
- b), falls $t_R > t_{n-2, 1-\alpha}$,
- c), falls $|t_R| > t_{n-2, 1-\alpha/2}$, d.h. $t_R < -t_{n-2, 1-\alpha/2}$ oder $t_R > t_{n-2, 1-\alpha/2}$,

Dabei bezeichnet R_{XY} die Stichprobenkorrelation. Der Test wird hier als **t-Test auf Unkorreliertheit** oder kurz als **Korrelationstest** bezeichnet.

Satz 11.3.9: Approximativer Gauß-Test auf Unabhängigkeit

Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängig identisch verteilt wie (X, Y) , wobei die Momente aller Stichprobenvariablen endlich sind, d.h. Annahme (M) von Definition 8.2.1 erfüllt ist. Gegeben sei folgendes Testproblem:

H_0 : X und Y sind unabhängig vs. H_1 : X und Y sind abhängig.

Dann basiert die Entscheidungsregel eines Tests zum Niveau α auf dem Resultat

$$T_R \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{unter } H_0$$

und lautet: Verwerfe H_0 ,

falls $|t_R| > z_{1-\alpha/2}$, d.h. $t_R < -z_{1-\alpha/2}$ oder $t_R > z_{1-\alpha/2}$.

Der Test wird hier als **approximativer Gauß-Test auf Unabhängigkeit** bezeichnet und ist für $n \geq 30$ anwendbar.

Jede Korrelation, die betragsmäßig kleiner als 0.20 ist, ist für $n \leq 100$ nicht signifikant.

Das lineare Regressionsmodell

Einfache lineare Regression

Definition 12.1.1: Einfaches lineares Regressionsmodell

Gegeben sei eine Stichprobe aus n beobachtbaren Zufallsvektoren $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ und n nicht beobachtbaren Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n$. Gilt dann

(A0) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$ für $i = 1, \dots, n$,

so bezeichnet man (A0) als **einfaches lineares Regressionsmodell**. Die Parameter β_0 und β_1 werden als **theoretische Regressionskoeffizienten** und die Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n$ als **stochastische Fehler** oder **stochastische Residuen** bezeichnet. Die Funktion

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

definiert die **theoretische Regressionsgerade**, wobei der Definitionsbereich von x fallabhängig einzuschränken ist.

KQ-Schätzer

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \text{ und } \hat{\beta}_1 = \frac{\tilde{S}_{XY}}{\tilde{S}_X^2} \text{ mit } \tilde{S}_X^2 > 0$$

Satz 12.1.1: Eigenschaften der empirischen KQ-Regression

1. Die KQ-Gerade geht durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$.
2. Die Summe der gefitteten Werte ist gleich der Summe der y -Werte.
3. Die Summe der KQ-Residuen ist gleich 0.
4. KQ-Residuen und x -Werte sind unkorreliert.
5. Gefittete Werte und KQ-Residuen sind unkorreliert.
6. Es gilt die **Streuungszerlegungsformel der KQ-Regression**.

Bestimmtheitsmaß der KQ-Regression

Gegeben seien metrisch skalierte Beobachtungswerte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $\tilde{s}_X^2 > 0$ und $\tilde{s}_Y^2 > 0$. Im Zusammenhang der KQ-Regression gilt dann:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (12.1.14)$$

oder äquivalent

$$\tilde{s}_Y^2 = \tilde{s}_Y^2 + \tilde{s}_U^2. \quad (12.1.15)$$

Dabei wird $\tilde{s}_Y^2$ als **Gesamtstreuung**, $\tilde{s}_Y^2$ als **erklärte Streuung** und $\tilde{s}_U^2$ als **Residualstreuung** bezeichnet. Die Terme in (12.1.14) heißen **Gesamtquadratsumme**, **erklärte Quadratsumme** und **Residuenquadratsumme**. Darauf basierend ist das Bestimmtheitsmaß definiert als

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (12.1.16)$$

bzw.

$$R^2 = \frac{\tilde{s}_Y^2}{\tilde{s}_Y^2} = 1 - \frac{\tilde{s}_U^2}{\tilde{s}_Y^2}. \quad (12.1.17)$$

Dabei gilt:

- (i) $R^2 \in [0, 1]$ und
- (ii) $R^2 = r_{XY}^2 = \hat{\beta}_1^2 \frac{s_X^2}{s_Y^2}$,

wobei r_{XY} die empirische Korrelation ist.

Standardfehler der Regression

$$SER = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2} = \sqrt{\frac{n}{n-2} \times \tilde{s}_U^2}$$

Zusammenhang von SER und R^2

$$SER^2 = \frac{n}{n-2} \tilde{s}_Y^2 (1 - R^2)$$

Modellannahmen-Sets

Definition 12.1.2: Klassisches Modell mit nichtstochastischem Regressor

Wir sprechen von einem klassischen linearen Regressionsmodell mit nichtstochastischem Regressor, falls folgende Annahmen gelten:

(A0*) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + U_i$ für $i = 1, \dots, n$ und

(A1*) die Fehler $U_1, \dots, U_n$ sind unabhängig $N(0, \sigma_U^2)$ -verteilt.

Dabei sind $x_1, \dots, x_n$ nichtstochastisch und $\tilde{s}_X^2 > 0$.

Definition 12.1.3: Klassisches Modell mit stochastischem Regressor

Wir sprechen von einem klassischen linearen Regressionsmodell mit stochastischem Regressor, falls folgende Annahmen gelten:

(A0) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$ für $i = 1, \dots, n$,

(A1**) $U_i | X_i = x_i \sim N(0, \sigma_U^2)$ für $i = 1, \dots, n$,

(A2) $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ sind u.i.v. und

(A3) alle Zufallsvariablen genügen Annahme (M) aus Definition 8.2.1 und besitzen positive Varianzen.

Definition 12.1.4: Modell mit bedingt heteroskedastischem Fehler

Wir sprechen von einem linearen Regressionsmodell mit bedingt heteroskedastischem Fehler, falls gilt:

(A0) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$ für $i = 1, \dots, n$,

(A1) $E(U_i | X_i = x_i) = 0$ für $i = 1, \dots, n$,

(A2) $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ sind u.i.v. und

(A3) alle Zufallsvariablen genügen Annahme (M) aus Definition 8.2.1 und besitzen positive Varianzen.

Tabelle 12.1.1: Modellimmanente Eigenschaften der verschiedenen Annahmeensembles

Eigenschaft	KN	KS	BH	UHV
(1) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + U_i$	✓	✓	✓	✓
(2) $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ sind unabhängig	✓	✓	✓	✓
(3) $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ sind identisch verteilt	✗	✓	✓	✗
(4) $U_1, \dots, U_n$ sind unabhängig	✓	✓	✓	✓
(5) $U_1, \dots, U_n$ sind identisch verteilt	✓	✓	✓	✗
(6) $U_1, \dots, U_n$ sind $N(0, \sigma_U^2)$ -verteilt	✓	✓	✗	✗
(7) U_i und X_i sind unabhängig	✓	✓	✗	✗
(8) $Cov(X_i, U_i) = E(X_i U_i) = 0$	✓	✓	✓	✓
(9) $E(U_i) = E(U_i X_i = x_i) = 0$	✓	✓	✓	✓
(10) $E(Y_i X_i = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$	✓	✓	✓	✓
(11) $Var(U_i) = E[Var(U_i X_i)]$	✓	✓	✓	✓
(12) $Var(U_i) = \sigma_U^2$ (unbedingte Homoskedastizität)	✓	✓	✓	✗
(13) $Var(U_i X_i = x_i) = \sigma_U^2$ (bedingte Homoskedastizität)	✓	✓	✗	✗
(14) $U_i X_i = x_i \sim N(0, \sigma_U^2)$	✓	✓	✗	✗
(15) $Y_i X_i = x_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma_U^2)$	✓	✓	✗	✗
(16) $\beta_0 = \mu_Y - \beta_1 \mu_X, \beta_1 = \sigma_{XY} / \sigma_X^2$	✗	✓	✓	✗
(17) $\sigma_U^2 = \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 / \sigma_X^2$	✗	✓	✓	✗

Theoretische KQ-Regression

Theoretische KQ-Regression

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit

$$\sigma_Y^2 < \infty \quad \text{und} \quad 0 < \sigma_X^2 < \infty.$$

Dann sind die *theoretischen KQ-Koeffizienten* einer **theoretischen KQ-Regression** von Y auf X die Lösungen für das Problem

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \bar{Q}(\beta_0, \beta_1) \quad \text{mit} \quad \bar{Q}(\beta_0, \beta_1) = E[(Y - \beta_0 - \beta_1 X)^2].$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \sigma_{XY} / \sigma_X^2 \quad \text{und} \quad \bar{\beta}_0 = \mu_Y - \bar{\beta}_1 \mu_X, \quad \text{wobei} \\ \bar{y}(x) &= \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 x \end{aligned}$$

als **theoretische KQ-Gerade** bezeichnet wird. Der beste lineare MSE-Prädiktor von Y auf Basis von X ist gegeben durch

$$\bar{Y} = \bar{y}(X) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 X.$$

Dabei gilt:

$$E(Y - \bar{Y}) = 0 \quad \text{und} \tag{12.1.38}$$

$$\text{Var}(Y - \bar{Y}) = \sigma_Y^2 (1 - \varrho_{XY}^2). \tag{12.1.39}$$

Satz 12.1.2: Theoretische Regressionsgerade = KQ-Gerade

Die in den Modellen KS und BH (Definitionen 12.1.3 und 12.1.4) enthaltene theoretische Regressionsgerade ist die KQ-Gerade einer theoretischen Regression von Y auf X . Dabei gilt:

$$\beta_0 = \mu_Y - \beta_1 \mu_X, \quad \beta_1 = \sigma_{XY} / \sigma_X^2 \quad \text{und} \quad \sigma_U^2 = \sigma_Y^2 (1 - \varrho_{XY}^2),$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(Y_i), \quad \mu_X = E(X_i), \quad \sigma_X^2 = \text{Var}(X_i), \quad \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y_i), \\ \sigma_{XY} &= \text{Cov}(X_i, Y_i), \quad \varrho_{XY} = \text{Corr}(X_i, Y_i) \quad \text{und} \quad \text{Var}(U_i) = \sigma_U^2 \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$ sind.

Inferenz im einfachen linearen Regressionsmodell

Satz 12.1.4: Konfidenzintervalle und Tests im Regressionsmodell

Gegeben sei ein einfaches lineares Regressionsmodell gemäß Definition 12.1.1. Dann gilt:

1. ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für β_j mit $j = 0$ oder 1 ist

- (i) in den Modellen KN und KS für $n \geq 3$ gegeben durch

$$[\hat{\beta}_j - t_{n-2, 1-\alpha/2} \cdot \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \hat{\beta}_j + t_{n-2, 1-\alpha/2} \cdot \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}],$$

- (ii) im Modell BH für großes n gegeben durch

$$[\hat{\beta}_j - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \hat{\beta}_j + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}],$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 &= \frac{\hat{\sigma}_U^2}{n\tilde{S}_X^2}, & \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \hat{\sigma}_U^2}{n\tilde{S}_X^2}, \\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \hat{U}_i^2}{n(\tilde{S}_X^2)^2}, & \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{H}_i^2 \hat{U}_i^2}{n(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{H}_i^2)^2} \end{aligned}$$

mit $\tilde{S}_X^2 > 0$,

$$\hat{\sigma}_U^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{U}_i^2 \quad \text{und} \quad \hat{H}_i = 1 - \frac{\bar{X} X_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

2. die Entscheidungsregeln eines Tests zum Niveau α für das Testproblem

- a) $H_0 : \beta_j \geq \beta_{j,0}$ vs. $H_1 : \beta_j < \beta_{j,0}$,
- b) $H_0 : \beta_j \leq \beta_{j,0}$ vs. $H_1 : \beta_j > \beta_{j,0}$,
- c) $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$ vs. $H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}$,

- (i) basieren in den Modellen KN und KS auf

$$\tilde{T}_{\beta_j} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t(n-2) \quad \text{für } \beta_j = \beta_{j,0} \text{ und } j = 0, 1.$$

und lauten: Verwerfe H_0 in

- a), falls $\tilde{t}_{\beta_j} < -t_{n-2, 1-\alpha}$,
- b), falls $\tilde{t}_{\beta_j} > t_{n-2, 1-\alpha}$,
- c), falls $|\tilde{t}_{\beta_j}| > t_{n-2, 1-\alpha/2}$,

- (ii) basieren im Modell BH auf

$$\hat{T}_{\beta_j} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \beta_j = \beta_{j,0} \text{ und } j = 0, 1.$$

und lauten für großes n : Verwerfe H_0 in

- a), falls $\hat{t}_{\beta_j} < -z_{1-\alpha}$,
- b), falls $\hat{t}_{\beta_j} > z_{1-\alpha}$,
- c), falls $|\hat{t}_{\beta_j}| > z_{1-\alpha/2}$,

- 3. mit entsprechenden zusätzlichen Konvergenzannahmen sind die Konfidenzintervalle und Tests für Modell BH auch für Modell UHV gültig.

Im Falle von Modell BH handelt es sich in (ii) um approximative Konfidenzintervalle bzw. approximative Tests für $n \geq 60$.

Satz 12.1.5: KQ-Schätzer bei binärem Regressor

Gegeben sei eine Stichprobe $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ mit binärem X_i und $\tilde{S}_X^2 > 0$. Dann gilt:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_0 \quad \text{und} \quad \hat{\beta}_1 = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_0.$$

Dabei bezeichnet $\bar{Y}_0$ das (bedingte) Stichprobenmittel aller Y_i mit $X_i = 0$ und $\bar{Y}_1$ das (bedingte) Stichprobenmittel aller Y_i mit $X_i = 1$.

Satz 12.1.6: Varianzschätzer bei binärem Regressor

Gegeben sei eine Stichprobe $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ mit binärem X_i und $\tilde{S}_X^2 > 0$. Dann gilt:

$$(i) \quad \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 = \frac{S_p^2}{N_0} \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{S_p^2}{N_0} + \frac{S_p^2}{N_1}, \quad \text{wobei}$$

$$S_p^2 = \frac{1}{N_0 + N_1 - 2} (N_0 \tilde{S}_0^2 + N_1 \tilde{S}_1^2) \quad \text{für } n \geq 3,$$

$$(ii) \quad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 = \frac{\tilde{S}_0^2}{N_0} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\tilde{S}_0^2}{N_0} + \frac{\tilde{S}_1^2}{N_1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Dabei bezeichnet $\tilde{S}_0^2$ die (nichtkorrigierte) Stichprobenvarianz aller Y_i mit $X_i = 0$ und $\tilde{S}_1^2$ die entsprechende Stichprobenvarianz für $X_i = 1$. Die stochastischen Stichprobenumfänge N_0 und N_1 geben die betreffende Anzahl von Nullen bzw. Einsen an.

Äquivalenz der Inferenz bezüglich β_1 und $\mu_1 - \mu_0$

Konfidenzintervalle und Teststatistiken sind

- (i) in den Modellen KN und KS zu denen über Erwartungswertdifferenzen bei Normalverteilung und homoskedastischer Varianz identisch,
- (ii) in Modell BH zu denen über Erwartungswertdifferenzen ohne Verteilungsannahme und unbekannter heteroskedastischer Varianz identisch.

Partielle lineare Regression

Empirische partielle Regression im 3-Variablenfall

Gegeben seien dreidimensionale Beobachtungswerte $(x_1, z_1, y_1), \dots, (x_n, z_n, y_n)$ zu den Merkmalen X , Z und Y . Außerdem sei die (empirische) Kovarianzmatrix der Beobachtungen von X und Z invertierbar. Man führe nun folgende einfache lineare Regressionen und Berechnungen durch:

1. KQ-Regression von Y auf Z und Extraktion der KQ-Residuen.
2. KQ-Regression von X auf Z und Extraktion der KQ-Residuen.
3. KQ-Regression der Residuen aus Schritt 1 auf die Residuen aus Schritt 2.

Dann wird die im 3. Schritt durchgeführte Regression als **partielle Regression von Y auf X unter Z** bezeichnet. Der korrespondierende Steigungskoeffizient wird als **partieller Regressionskoeffizient** bezeichnet und mit

$$b_{Y \sim X \bullet Z}$$

notiert. Die Korrelation der Residuen aus Schritt 1 und Schritt 2 heißt **partielle Korrelation zwischen X und Y unter Z** und wird mit

$$r_{XY \bullet Z}$$

notiert. Unter Verwendung der üblichen Notation gilt dann:

$$b_{Y \sim X \bullet Z} = \frac{\tilde{s}_{XY} \tilde{s}_Z^2 - \tilde{s}_{YZ} \tilde{s}_{XZ}}{\tilde{s}_X^2 \tilde{s}_Z^2 (1 - r_{XZ}^2)} \quad \text{und} \quad (12.2.1)$$

$$r_{XY \bullet Z} = \frac{r_{XY} - r_{YZ} r_{XZ}}{\sqrt{(1 - r_{YZ}^2)(1 - r_{XZ}^2)}}, \quad \text{sofern } \tilde{s}_Y^2 > 0. \quad (12.2.2)$$

Empirische Verzerrung

$$b_{Y \sim X} = b_{Y \sim X \bullet Z} + b_{Y \sim Z \bullet X} \frac{\tilde{s}_{XZ}}{\tilde{s}_X^2}, \quad \text{wobei} \quad b_{Y \sim X} = \frac{\tilde{s}_{XY}}{\tilde{s}_X^2}$$

Theoretische partielle Regression im 3-Variablenfall

Gegeben sei ein dreidimensionaler Zufallsvektor (X, Z, Y) . Die (theoretische) Kovarianzmatrix von $(X, Z)^T$ sei invertierbar. Man führe nun folgende theoretische Regressionen und Berechnungen durch:

1. Regression von Y auf Z und Extraktion des Prognosefehlers $Y - \hat{Y}$.
2. Regression von X auf Z und Extraktion des Prognosefehlers $X - \hat{X}$.
3. Regression des Fehlers aus Schritt 1 auf den Fehler aus Schritt 2.

Dann wird die im 3. Schritt durchgeführte Regression als **theoretische partielle Regression von Y auf X unter Z** bezeichnet. Der korrespondierende Steigungskoeffizient wird als **theoretischer partieller Regressionskoeffizient** bezeichnet und mit

$$\beta_{Y \sim X \bullet Z}$$

notiert. Die Korrelation der beiden Fehler aus Schritt 1 und Schritt 2 heißt **theoretische partielle Korrelation zwischen X und Y unter Z** und wird mit

$$\varrho_{XY \bullet Z}$$

notiert. Unter Verwendung der üblichen Notation gilt dann:

$$\beta_{Y \sim X \bullet Z} = \frac{\sigma_{XY}\sigma_Z^2 - \sigma_{YZ}\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2\sigma_Z^2(1 - \varrho_{XZ}^2)} \quad \text{und} \quad (12.2.5)$$

$$\varrho_{XY \bullet Z} = \frac{\varrho_{XY} - \varrho_{YZ}\varrho_{XZ}}{\sqrt{(1 - \varrho_{YZ}^2)(1 - \varrho_{XZ}^2)}}, \quad \text{sofern } \sigma_Y^2 > 0. \quad (12.2.6)$$

Theoretische Verzerrung

$$\beta_{Y \sim X} = \beta_{Y \sim X \bullet Z} + \beta_{Y \sim Z \bullet X} \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}, \quad \text{wobei} \quad \beta_{Y \sim X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

Multiple lineare Regression

Definition 12.2.1: Empirische multiple Regression

Angenommen, es liegen $(p + 1)$ -dimensionale metrische Beobachtungswerte ($p \geq 1$)

$$(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}, y_1), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2p}, y_2), \dots, (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np}, y_n)$$

korrespondierend zu den Merkmalen $X_1, X_2, \dots, X_p$ und Y vor. Dabei sei die zu den X -Merkmalen korrespondierende (empirische) Kovarianzmatrix invertierbar. Dann bezeichnen wir die Lösungen zum Minimierungsproblem

$$\min_{b_0, b_1, \dots, b_p} \hat{Q}(b_0, b_1, \dots, b_p) \quad \text{mit}$$
$$\hat{Q}(b_0, b_1, \dots, b_p) := \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2} - \dots - b_p x_{ip})^2$$

als **KQ-Regressionskoeffizienten** und notieren diese mit

$$\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p.$$

Die Berechnungsmethode heißt **multiple lineare KQ-Regression von Y auf $X_1, \dots, X_p$** . Im Falle $p = 1$ spricht man von einer **einfachen linearen KQ-Regression**. Die Funktion

$$\hat{y}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + \dots + \hat{b}_p x_p$$

definiert im Falle $p \geq 2$ eine **KQ-Regressionsebene**, im Falle $p = 1$ eine **KQ-Gerade**. Die Werte

$$\hat{y}_i = \hat{y}(x_i) = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{i1} + \hat{b}_2 x_{i2} + \dots + \hat{b}_p x_{ip} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

heißen **gefittete Werte** und sind als durch die Regressionsebene prognostizierte oder linear approximierte Werte interpretierbar. Die Abweichungen

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

entsprechen den Prognose- bzw. Approximationsfehlern und werden als **KQ-Residuen** bezeichnet.

Bestimmtheitsmaß und Standardfehler

$$R^2 = \frac{\tilde{s}_Y^2}{\tilde{s}_Y^2} = 1 - \frac{\tilde{s}_U^2}{\tilde{s}_Y^2}$$

$$SER = \sqrt{\frac{1}{n - p - 1} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}$$

Zusammenhang zur empirischen partiellen Korrelation

Die KQ-Regressionskoeffizienten einer multiplen Regression stimmen mit den Koeffizienten einer entsprechenden partiellen Regression überein.

Definition 12.2.2: Theoretische multiple Regression

Gegeben seien $(p + 1)$ Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_p$ und Y mit $p \geq 1$, welche Annahme (M) aus Definition 8.2.1 genügen. Außerdem sei die (theoretische) Kovarianzmatrix von $(X_1, \dots, X_p)^T$ invertierbar. Dann bezeichnen wir die Lösungen zum Minimierungsproblem

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p} \bar{Q}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p) \quad \text{mit}$$

$$\bar{Q}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p) := E[(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_p X_p)^2]$$

als **theoretische KQ-Regressionskoeffizienten** und notieren diese mit

$$\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_p.$$

Die Funktion

$$\hat{y}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 x_1 + \dots + \bar{\beta}_p x_p$$

definiert im Falle $p \geq 2$ eine **theoretische KQ-Regressionsebene**, im Falle $p = 1$ eine **theoretische KQ-Gerade**. Die stochastische Statistik

$$\hat{Y} = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 X_1 + \dots + \bar{\beta}_p X_p$$

heißt **bester linearer MSE Prädiktor** von Y auf Basis von $X_1, \dots, X_p$.

Die KQ-Regressionskoeffizienten einer theoretischen multiplen Regression stimmen mit den Koeffizienten einer entsprechenden theoretischen partiellen Regression überein.

Definition 12.2.3: Multiples lineares Regressionsmodell

Gegeben sei eine Stichprobe aus n beobachtbaren Zufallsvektoren

$$(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1p}, Y_1), \dots, (X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{np}, Y_n)$$

mit $p \geq 1$ und n nicht beobachtbaren Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n$. Gilt dann

$$(A0M) \quad Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \dots + \beta_p X_{ip} + U_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

so bezeichnet man (A0M) als **multiples lineares Regressionsmodell**. Die Parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ werden als **theoretische Regressionskoeffizienten** und die Variablen $U_1, \dots, U_n$ als **stochastische Fehler** oder **stochastische Residuen** bezeichnet. Die Funktion

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$$

definiert die **theoretische Regressionsebene**, wobei der Definitionsbereich von $x_1, \dots, x_p$ fallabhängig einzuschränken ist.

Definition 12.2.4: Modell BH als multiples Regressionsmodell

Wir sprechen von einem **multiplen linearen Regressionsmodell mit bedingt heteroskedastischem Fehler**, falls gilt:

$$(A0M) \quad Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_p X_{ip} + U_i \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

$$(A1M) \quad E(U_i | X_{i1} = x_{i1}, \dots, X_{ip} = x_{ip}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

$$(A2M) \quad (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1p}, Y_1), \dots, (X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{np}, Y_n) \text{ sind u.i.v.,}$$

$$(A3M) \quad \text{alle Zufallsvariablen genügen Annahme (M) aus Definition 8.2.1 und besitzen positive Varianzen und}$$

$$(A4M) \quad \text{die Kovarianzmatrix von } (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip})^T \text{ ist invertierbar.}$$

Satz 12.2.1: Theoretische Regressionsebene = KQ-Regressionsebene

Die in den multiplen Modellen KS und BH enthaltene theoretische Regressionsebene ist die KQ-Regressionsebene einer theoretischen Regression von Y auf $X_1, \dots, X_p$. Dabei gilt:

$$\beta_0 = \mu_Y - \beta_1 \mu_{X_1} - \cdots - \beta_p \mu_{X_p}, \quad (12.2.29)$$

$$\beta_j = \beta_{Y \sim X_j \bullet \mathbf{x}_{-j}} \quad \text{für } j = 1, \dots, p \quad \text{und} \quad (12.2.30)$$

$$\sigma_U^2 = \sigma_Y^2 (1 - \mathfrak{R}^2). \quad (12.2.31)$$

Satz 12.2.2: Inferenz im multiplen Regressionsmodell

Gegeben sei ein multiples lineares Regressionsmodell gemäß Definition 12.2.3. Dann gilt für $j = 0, 1, \dots, p$ und $n \geq p + 2$:

1. ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für β_j ist

- (i) in den Modellen KN und KS gegeben durch

$$[\hat{\beta}_j - t_{n-p-1, 1-\alpha/2} \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \hat{\beta}_j + t_{n-p-1, 1-\alpha/2} \tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}],$$

- (ii) in Modell BH für großes n gegeben durch

$$[\hat{\beta}_j - z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}, \hat{\beta}_j + z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}],$$

wobei $\tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}^2$ bzw. $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}^2$ **nur-homoskedasizitäts-konsistente Varianzschätzer** bzw. **heteroskedastizitäts-robuste Varianzschätzer** bezeichnen,

2. die Entscheidungsregeln der üblichen Tests basieren

- (i) in den Modellen KN und KS auf

$$\tilde{T}_{\beta_j} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\tilde{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t(n - p - 1) \quad \text{für } \beta_j = \beta_{j,0},$$

- (ii) in Modell BH für großes n auf

$$\hat{T}_{\beta_j} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1) \quad \text{für } \beta_j = \beta_{j,0},$$

3. mit entsprechenden zusätzlichen Konvergenzannahmen sind die Konfidenzintervalle und Tests für Modell BH auch für Modell UHV gültig.

Leitfrage für das OVB-Problem

Gibt es neben den Regressoren $X_1, \dots, X_p$ noch eine weitere maßgebliche Einflussgröße auf Y , die mit mindestens einem Regressor korreliert ist?

Satz 12.2.3: OVB im 3-Variablen-Fall

Angenommen, Modell KS oder BH mit der Grundgleichung

$$Y = \beta_0 + \beta_X \cdot X + \beta_Z \cdot Z + V$$

sei in einer bestimmten Situation adäquat. Schätzt man

$$Y = \beta_0 + \beta_X \cdot X + U$$

mit den gewöhnlichen KQ-Schätzern, so beträgt der OVB für β_X

$$OVB_X = \beta_Z \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}, \quad \text{wobei} \quad \beta_Z \sigma_{XZ} = \text{Cov}(X, U). \quad (12.2.39)$$

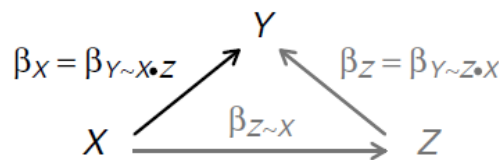
Direkter und indirekter Effekt (OVB) im 3-Variablen-Fall

$$\beta_{Y \sim X} = \beta_X + \beta_Z \beta_{Z \sim X}$$

Gesamteffekt = Direkter Effekt + Indirekter Effekt

Indirekter Effekt = OVB_X , d. h.

$$OVB_X = \beta_Z \beta_{Z \sim X}, \quad \text{wobei} \quad \beta_{Z \sim X} = \frac{\sigma_{XZ}}{\sigma_X^2}$$



Verteilungstabellen

Standardnormalverteilung

Tabelle A.1: Wertetabelle der Standardnormalverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion der Normalverteilung, $\Phi(z)$.
Ablesebeispiel: $\Phi(1.23) = \Phi(1.2 + 0.03) \approx 0.8907$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

t-Verteilung

Tabelle A.2: Quantiltabelle der t-Verteilung

Tabelliert sind die Quantile der t -Verteilung für n Freiheitsgrade.

Für $n > 30$ gilt: $t_{n,\alpha} \approx z_\alpha$, wobei z_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Ablesebeispiel: $t_{20,0.99} \approx 2.528$.

n	0.6	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.3249	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	318.3088	636.6192
2	0.2887	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.3271	31.5991
3	0.2767	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.2145	12.9240
4	0.2707	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	0.2672	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	0.2648	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	0.2632	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	0.2619	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	0.2610	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	0.2602	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
11	0.2596	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0247	4.4370
12	0.2590	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	0.2586	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	0.2582	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	0.2579	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	0.2576	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	0.2573	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	0.2571	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9216
19	0.2569	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5794	3.8834
20	0.2567	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8495
21	0.2566	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5272	3.8193
22	0.2564	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7921
23	0.2563	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.2562	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.4668	3.7454
25	0.2561	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.2560	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7066
27	0.2559	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6896
28	0.2558	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	0.2557	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3962	3.6594
30	0.2556	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460

Chiquadrat-Verteilung

Tabelle A.3: Quantilstabelle der χ^2 -Verteilung

Tabelliert sind die Quantile der χ^2 -Verteilung für n Freiheitsgrade.
Ablesebeispiel: $\chi^2_{10,0.95} = 18.307$.

n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.455	2.705	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	4.605	5.992	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	4.351	9.236	11.070	12.832	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.647	2.180	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.054	3.816	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.906	10.117	11.651	18.338	27.204	30.143	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.543	10.982	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	24.337	34.382	37.653	40.647	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	25.337	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.257	16.047	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.954	16.791	18.493	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892