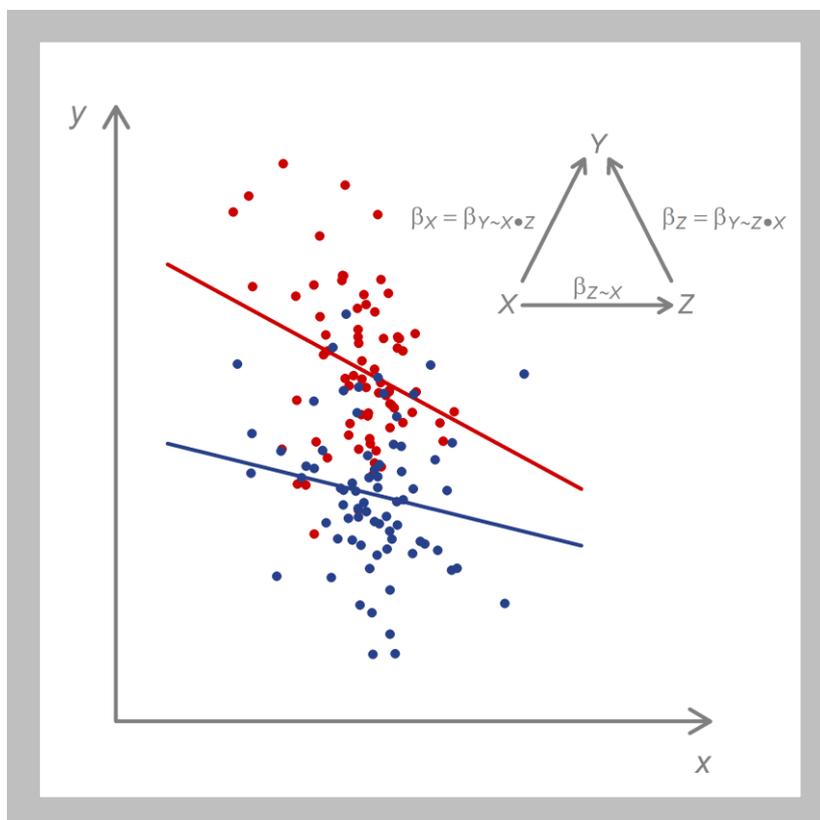


Klausur-Formelsammlung

Statistik 1

Definitionen, Formeln und Sätze



Gesamtbeschreibung empirischer Verteilungen

Elementare Begriffe und Notation

X, Y, Z, \dots	Merkmale (Variablen)
x_1, x_2, \dots, x_n oder x_i für $i = 1, 2, \dots, n$	Beobachtungswerte des Merkmals X
n	i heißt Indexvariable, $\{1, 2, \dots, n\}$ heißt Indexmenge Anzahl der Beobachtungen (Stichprobenumfang)
a_1, a_2, \dots, a_k	Ausprägungsmöglichkeiten

Notation und Bezeichnungen bei Urlisten

n_j	Absolute Häufigkeit der j -ten Ausprägung
f_j	Relative Häufigkeit der j -ten Ausprägung
n_1, n_2, \dots, n_k	Absolute Häufigkeitsverteilung
f_1, f_2, \dots, f_k	Relative Häufigkeitsverteilung

Notation und Bezeichnungen bei klassierten Daten

$(c_{j-1}, c_j]$	j -te Größenklasse als Intervall von ausschließlich c_{j-1} bis einschließlich c_j
c_{j-1} bzw. c_j	linke bzw. rechte Klassengrenze der j -ten Klasse
\bar{n}_j	absolute Klassenhäufigkeit der j -ten Klasse
\tilde{f}_j	relative Klassenhäufigkeit der j -ten Klasse
$\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_k$	absolute Häufigkeitsverteilung (klassierter Fall)
$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_k$ (klassierter Fall)	relative Häufigkeitsverteilung

Häufigkeitsfunktion und EVF bei Urlisten

Gegeben seien Beobachtungswerte eines metrischen Merkmals X mit zugehörigen Ausprägungen a_1, a_2, \dots, a_k . Weiter sei f_1, f_2, \dots, f_k die zugehörige relative Häufigkeitsverteilung von X .

Dann ist die (relative) **Häufigkeitsfunktion** für diese Werte gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f_j, & x = a_j, j = 1, \dots, k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die **empirische Verteilungsfunktion (EVF)** für die Urliste lautet

$$F_n(x) = \sum_{j:a_j \leq x} f_n(a_j) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Häufigkeitsdichtefunktion und EVF bei klassierten Daten

Gegeben seien Beobachtungswerte eines metrischen Merkmals X , die klassiert in k Größenklassen $(c_{j-1}, c_j]$, für $j = 1, \dots, k$, vorliegen.

Dann ist die **Häufigkeitsdichtefunktion** für diese Werte gegeben durch

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} \tilde{f}_j/d_j, & x \in (c_{j-1}, c_j], j = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die (approximative) **empirische Verteilungsfunktion (EVF)** lautet

$$\tilde{F}_n(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{f}_n(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq c_0, \\ \tilde{F}_n(c_{j-1}) + (x - c_{j-1}) \frac{\tilde{f}_j}{d_j}, & x \in (c_{j-1}, c_j], \\ 1, & x > c_k. \end{cases}$$

Spezifizierende Beschreibung empirischer Verteilungen

Lagekennwerte

Arithmetisches Mittel

Für metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n berechnet sich das arithmetische Mittel als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Unter Vorgabe absoluter oder relativer Häufigkeiten aller vorkommenden Ausprägungen a_j , für $j = 1, \dots, k$, gilt entsprechend

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k a_j n_j = \sum_{j=1}^k a_j f_j.$$

Liegen die Werte in k Größenklassen mit Klassenmitten m_j vor, gilt unter Vorgabe absoluter oder relativer Klassenhäufigkeiten näherungsweise

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k m_j \tilde{n}_j = \sum_{j=1}^k m_j \tilde{f}_j.$$

Geordnete Werte, Minimum, Maximum und Median

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Die **geordneten Werte** werden mit $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ notiert. Es gilt:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}.$$

Dabei bezeichnet $x_{(1)}$ das **Minimum** (den kleinsten Wert) und $x_{(n)}$ das **Maximum** (den größten Wert).

Der Median ist definiert als

$$\tilde{x}_{0.5} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}), & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Liegen die Werte klassiert in k Größenklassen $(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, c_k]$ vor, wird der Median näherungsweise bestimmt über

$$\tilde{x}_{0.5} = c_{j-1} + \frac{(0.5 - \tilde{F}_n(c_{j-1}))}{\tilde{f}_j/d_j},$$

falls er in die j -te Klasse hineinfällt.

Modalwert

Der **Modalwert** oder **Modus**, notiert mit x_{mod} , ist der am häufigsten vorkommende Wert einer Urliste. Im Falle klassierter Daten lässt er sich als Klassenmitte der Klasse mit der höchsten Häufigkeitsdichte definieren.

Fechner'sche Lageregeln

Bei einer unimodalen Verteilung eines metrischen Merkmals gilt:

$\bar{x} = \tilde{x}_{0.5} = x_{\text{mod}}$	bei (perfekter) Symmetrie,
$x_{\text{mod}} < \tilde{x}_{0.5} < \bar{x}$	bei Rechtsschiefe,
$\bar{x} < \tilde{x}_{0.5} < x_{\text{mod}}$	bei Linksschiefe.

Spezielle Lagekennwerte

Arithmetisches Mittel bei gruppierten Daten

Gegeben seien n metrische Beobachtungswerte, gruppiert in k Gruppen mit jeweiligen Gruppenmittelwerten \bar{x}_j und **Gruppenumfängen** \tilde{n}_j , für $j = 1, \dots, k$. Dann gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \tilde{n}_j = \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \tilde{f}_j,$$

wobei $\tilde{f}_j = \tilde{n}_j/n$ das **Gruppengewicht** der j -ten Gruppe bezeichnet. In diesem Zusammenhang spricht man auch von einem **gewichteten Mittel**.

Quantile

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann ist für $\alpha \in (0, 1)$, das **α -Quantil** gegeben durch

$$\tilde{x}_\alpha = \begin{cases} x_{(\lceil n\alpha \rceil + 1)}, & \text{falls } n\alpha \text{ keine natürliche Zahl ist,} \\ \frac{1}{2}(x_{(n\alpha)} + x_{(n\alpha+1)}), & \text{falls } n\alpha \text{ eine natürliche Zahl ist,} \end{cases}$$

wobei „[...]“ die Gauß-Klammer bezeichnet.

Liegen die Werte klassiert in k Größenklassen $(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, c_k]$ vor, wird das α -Quantil näherungsweise bestimmt über

$$\tilde{x}_\alpha \approx c_{j-1} + \frac{(\alpha - \tilde{F}_n(c_{j-1}))}{\tilde{f}_j/d_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, k,$$

falls es in die j -te Klasse hineinfällt.

Geometrisches Mittel

Seien x_0, x_1, \dots, x_n zeitlich aufeinanderfolgende metrische Werte einer Zeitreihe korrespondierend zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, \dots, n$. Dann heißen

$$W_i = \frac{x_i}{x_{i-1}} \quad \text{bzw.} \quad R_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} = W_i - 1$$

Wachstumsfaktor bzw. **Wachstumsrate** zum Zeitpunkt i für $i = 1, \dots, n$. Das **geometrische Mittel** der Wachstumsfaktoren ist definiert als

$$\bar{x}_{geom} = (W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n)^{1/n}.$$

Dabei gilt:

$$x_0 \times \bar{x}_{geom}^n = x_n \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}_{geom} = \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{1/n}.$$

Die durchschnittliche prozentuale Wachstumsrate beträgt $100 \times (\bar{x}_{geom} - 1)\%$.

Streuungskennwerte

Mittlere absolute Abweichungen

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann heißen die Kennwerte

$$d^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}| \quad \text{und} \quad d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_{0.5}|$$

mittlere absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel bzw. **mittlere absolute Abweichung vom Median**. Liegen die Werte klassiert in k Größenklassen mit Klassenmitten m_j vor, so gelten die approximativen Berechnungsformeln

$$d^* \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \tilde{n}_j |m_j - \bar{x}| = \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j |m_j - \bar{x}| \quad \text{bzw.}$$

$$d \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \tilde{n}_j |m_j - \tilde{x}_{0.5}| = \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j |m_j - \tilde{x}_{0.5}|,$$

wobei arithmetisches Mittel bzw. Median approximativ bestimmt werden.

MAD

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Die absoluten Abweichungen vom Median sind definiert als

$$|x_1 - \tilde{x}_{0.5}|, |x_2 - \tilde{x}_{0.5}|, \dots, |x_n - \tilde{x}_{0.5}|.$$

Dann heißt der Median dieser Abweichungen **Median der absoluten Abweichungen vom Median** oder auch **MAD (Median Absolute Deviation)**.

Varianz und Standardabweichung

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann ist durch

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

die (*empirische*) **Varianz** und durch

$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}$$

die (*empirische*) **Standardabweichung** gegeben.

Liegen die Werte klassiert in k Größenklassen mit Klassenmitten m_j vor, so wird die Varianz näherungsweise über

$$\tilde{s}^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \tilde{n}_j (m_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j (m_j - \bar{x})^2$$

berechnet, wobei das arithmetische Mittel approximativ bestimmt wird.

Verschiebungsformel:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

Spezielle Streuungskennwerte

Streuungszerlegungsformel

Gegeben seien n metrische Beobachtungswerte gruppiert in k Gruppen mit jeweiligen Gruppenmittelwerten \bar{x}_j , Gruppenvarianzen \tilde{s}_j^2 und Gruppenumfängen \tilde{n}_j , für $j = 1, \dots, k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \tilde{n}_j \tilde{s}_j^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \tilde{n}_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j \tilde{s}_j^2 + \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f}_j = \tilde{n}_j/n$ die Gruppenanteile (Gruppengewichte) bezeichnen und

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \tilde{n}_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j \bar{x}_j$$

das Gesamtmittel ist. Die beiden Streuungsbestandteile

$$\sum_{j=1}^k \tilde{f}_j \tilde{s}_j^2 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^k \tilde{f}_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

werden als **interne Streuung** bzw. **externe Streuung** bezeichnet. Es gilt:

$$\text{Gesamtstreuung} = \text{Interne Streuung} + \text{Externe Streuung.}$$

Quantilsabstände

Für metrische Beobachtungswerte ist der α -**Quantilsabstand** definiert als

$$Q_\alpha = \bar{x}_{1-\alpha} - \bar{x}_\alpha \quad \text{für } \alpha \in (0, 0.5).$$

Er entspricht der Spannweite der mittleren $100 \times (1 - 2\alpha)\%$ aller Werte. Im Speziellen heißt $Q_{0.25}$ auch **Interquartilsabstand**.

Variationskoeffizient

Seien x_1, \dots, x_n nichtnegative metrische Beobachtungswerte mit $\bar{x} > 0$. Dann ist der **Variationskoeffizient** definiert als

$$v = \tilde{s} / \bar{x}.$$

Der Wert $100 \times v$ entspricht der Standardabweichung der prozentualen Abweichungen vom arithmetischen Mittel, die definiert sind als

$$y_i = 100 \times \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - 1 \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Standardisierung mittels Lage und Streuung

$$\text{Standardisierter Wert} = (\text{Originalwert} - \text{Lagewert}) / \text{Streuungswert.}$$

z-Standardisierung

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann sind die z-standardisierten Werte gegeben durch

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\tilde{s}_X} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Es gilt:

$$\bar{z} = 0 \quad \text{und} \quad \tilde{s}_Z^2 = 1.$$

Z-standardisierte Werte sind verschiebungs- und skaleninvariant.

Messung von Schiefe

Quantilkoeffizient der Schiefe

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann ist durch

$$QS_\alpha = \frac{(\tilde{x}_{1-\alpha} - \tilde{x}_{0.5}) - (\tilde{x}_{0.5} - \tilde{x}_\alpha)}{\tilde{x}_{1-\alpha} - \tilde{x}_\alpha} \quad \text{für } \alpha \in (0, 0.5),$$

der α -Quantilkoeffizient der Schiefe gegeben.

Speziell wird $QS_{0.25}$ als **Quantilkoeffizient der Schiefe** bezeichnet.

Für $QS_\alpha > 0$ sind die mittleren $(1 - 2\alpha) \times 100\%$ der Werte rechtsschief, für $QS_\alpha < 0$ linksschief und für $QS_\alpha = 0$ symmetrisch verteilt.

Darstellung und Messung von Konzentration

Gini-Koeffizient

Gegeben seien metrische, nichtnegative Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n , wobei mindestens ein Wert positiv ist. Dann ist der **Gini-Koeffizient** gegeben durch

$$G = \frac{2 \sum_{i=1}^n i x_{(i)}}{n \sum_{i=1}^n x_i} - \frac{n+1}{n},$$

wobei $x_{(i)}$ die geordneten Werte sind. Sein Wert entspricht dem Doppelten der Fläche, welche die Lorenzkurve zur Winkelhalbierenden einschließt. Dabei gilt:

$$G \in [0, 1 - 1/n].$$

Der Gini-Koeffizient ist gleich 0, falls $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ und ist gleich $1 - 1/n$, falls $x_{(1)} = x_{(2)} = \dots = x_{(n-1)} = 0$ und $x_{(n)} > 0$.

Spezifische Eigenschaften empirischer Kennwerte

Satz 4.9.1: Minimumeigenschaft des arithmetischen Mittels

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2.$$

Satz 4.9.2: Minimumeigenschaft des Medians

Gegeben seien metrische Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n . Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$:

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_{0.5}| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - c|.$$

Definition 4.9.1: Transformationseigenschaften empirischer Kennwerte

Ein empirischer Kennwert M heißt

- (i) **verschiebungsäquivalent**, falls für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$M(x_1 + c, x_2 + c, \dots, x_n + c) = M(x_1, x_2, \dots, x_n) + c.$$

- (ii) **verschiebungsinvariant**, falls jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$M(x_1 + c, x_2 + c, \dots, x_n + c) = M(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- (iii) **skalenäquivalent**, falls für jedes $c > 0$ gilt:

$$M(cx_1, cx_2, \dots, cx_n) = cM(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- (iv) **skaleninvariant**, falls für jedes $c > 0$ gilt:

$$M(cx_1, cx_2, \dots, cx_n) = M(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tab. 4.9.1: Transformationseigenschaften empirischer Kennwerte

Empirischer Kennwert	VÄ	VI	SÄ	SI
Arithmetisches Mittel	✓	✗	✓	✗
Median (Quantile)	✓	✗	✓	✗
Modalwert	✓	✗	✓	✗
Spannweite	✗	✓	✓	✗
Quantilsabstände	✗	✓	✓	✗
Mittlere absolute Abweichungen	✗	✓	✓	✗
MAD	✗	✓	✓	✗
Varianz	✗	✓	✗	✗
Standardabweichung	✗	✓	✓	✗
Variationskoeffizient	✗	✗	✗	✓
Quantilkoeffizient der Schiefe	✗	✓	✗	✓
Gini-Koeffizient	✗	✗	✗	✓

$VÄ$ = verschiebungsäquivalent, VI = verschiebungsinvariant

$SÄ$ = skalenäquivalent, SI = skaleninvariant

Tab. 4.9.2: Robustheitseigenschaften empirischer Lage- und Streuungskennwerte

Lagekennwerte		Streuungskennwerte	
nicht robust	robust	nicht robust	robust
Arithmetisches Mittel	Median	Spannweite	Quantilsabstände
	Quantile	Mittlere absolute Abweichungen	MAD
	Modalwert	Varianz	
		Standardabweichung	
		Variationskoeffizient	

Beschreibung und Analyse empirischer Zusammenhänge

Zusammenhänge zwischen kategorialen Merkmalen

Tab. 5.1.2: Allgemeine Gestalt einer Kontingenztabelle

$X \setminus Y$	b_1	b_2	\dots	b_j	\dots	b_l	Summe
a_1	n_{11}	n_{12}	\dots	n_{1j}	\dots	n_{1l}	$n_{1\bullet}$
a_2	n_{21}	n_{22}	\dots	n_{2j}	\dots	n_{2l}	$n_{2\bullet}$
\vdots	\vdots					\vdots	\vdots
a_i	n_{i1}	n_{i2}	\dots	n_{ij}	\dots	n_{il}	$n_{i\bullet}$
\vdots	\vdots					\vdots	\vdots
a_k	n_{k1}	n_{k2}	\dots	n_{kj}	\dots	n_{kl}	$n_{k\bullet}$
Summe	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	\dots	$n_{\bullet j}$	\dots	$n_{\bullet l}$	n

Gemeinsame Verteilung und Randverteilungen

(X, Y)	Merkmalsvektor
$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$	zweidimensionale Beobachtungswerte
a_1, a_2, \dots, a_k	Ausprägungen von X
b_1, b_2, \dots, b_l	Ausprägungen von Y
n_{ij}	Absolute Häufigkeit der Ausprägungskombination (a_i, b_j)
f_{ij}	Relative Häufigkeit der Ausprägungskombination (a_i, b_j)
$n_{11}, n_{12}, \dots, n_{kl}$	Gemeinsame absolute Häufigkeitsverteilung von (X, Y)
$f_{11}, f_{12}, \dots, f_{kl}$	Gemeinsame relative Häufigkeitsverteilung von (X, Y)
$n_{i\bullet}$ bzw. $n_{\bullet j}$	Absolute (Rand-)Häufigkeit der Ausprägung a_i bzw. b_j
$f_{i\bullet}$ bzw. $f_{\bullet j}$	Relative (Rand-)Häufigkeit der Ausprägung a_i bzw. b_j
$n_{1\bullet}, n_{2\bullet}, \dots, n_{k\bullet}$	Absolute Randverteilung (Häufigkeitsverteilung) von X
$n_{\bullet 1}, n_{\bullet 2}, \dots, n_{\bullet l}$	Absolute Randverteilung (Häufigkeitsverteilung) von Y
$f_{1\bullet}, f_{2\bullet}, \dots, f_{k\bullet}$	Relative Randverteilung (Häufigkeitsverteilung) von X
$f_{\bullet 1}, f_{\bullet 2}, \dots, f_{\bullet l}$	Relative Randverteilung (Häufigkeitsverteilung) von Y

Bedingte Verteilungen

$f_{ij}^{X Y} = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}}$	bedingte Häufigkeit von (a_i, b_j) bedingt auf $Y = b_j$, wobei $n_{\bullet j} > 0$ für alle j
$f_{ij}^{Y X} = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}}$	bedingte Häufigkeit von (a_i, b_j) bedingt auf $X = a_i$, wobei $n_{i\bullet} > 0$ für alle i
$f_{1j}^{X Y}, f_{2j}^{X Y}, \dots, f_{kj}^{X Y}$	bedingte Verteilung von X bedingt auf $Y = b_j$
$f_{i1}^{Y X}, f_{i2}^{Y X}, \dots, f_{il}^{Y X}$	bedingte Verteilung von Y bedingt auf $X = a_i$

Definition 5.1.1: Empirische Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Gegeben sei eine $(k \times l)$ -Kontingenztafel zweier Merkmale X und Y , wobei die Ausprägungen von X mit den k Zeilen und die Ausprägungen von Y mit den l Spalten der Tabelle korrespondieren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) X und Y sind **empirisch unabhängig**.
- (ii) Die Zeilenverteilungen stimmen mit der Randverteilung von Y überein.
- (iii) Die Spaltenverteilungen stimmen mit der Randverteilung von X überein.
- (iv) Die absoluten Häufigkeiten stimmen mit den unter Unabhängigkeit zu erwartenden Häufigkeiten überein, d.h.

$$n_{ij} = \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n} \text{ für alle } i \text{ und } j.$$

- (v) Das Produkt der Randverteilungen ergibt die gemeinsame Verteilung, d.h. $f_{ij} = f_{i\cdot} f_{\cdot j}$ für alle i und j .

Trifft eine der fünf Aussagen nicht zu, sind X und Y **empirisch abhängig**. Man spricht dann auch von einem **empirischen Zusammenhang**.

Chi-Quadrat-Koeffizient

Gegeben sei eine $(k \times l)$ -Kontingenztafel der absoluten Häufigkeiten n_{ij} mit positiven Randhäufigkeiten, d.h.

$$n_{i\cdot} > 0 \text{ und } n_{\cdot j} > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k \text{ und } j = 1, \dots, l.$$

Dann ist der **Chi-Quadrat-Koeffizient** definiert als

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}}.$$

Speziell für (2×2) -Tabellen gilt:

$$\chi^2 = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}n_{1\cdot}n_{2\cdot}}.$$

Es gilt: $\chi^2 \in [0, (M - 1) \cdot n]$, wobei $M = \min(k, l)$.

Mittlere quadratische Kontingenz

Die mittlere quadratische Kontingenz ist definiert als

$$\phi^2 = \frac{1}{n} \chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j})^2}{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}.$$

Dabei bezeichnet χ^2 den Chi-Quadrat-Koeffizienten.

Es gilt: $\phi^2 \in [0, (M - 1)]$, wobei $M = \min(k, l)$.

Kontingenzkoeffizient nach Pearson

Gegeben sei eine $(k \times l)$ -Kontingenztafel der absoluten Häufigkeiten n_{ij} mit positiven Randhäufigkeiten, d.h.

$$n_{i\cdot} > 0 \text{ und } n_{\cdot j} > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k \text{ und } j = 1, \dots, l.$$

Dann ist der Kontingenzkoeffizient nach Pearson definiert als

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{\phi^2 + 1}}, \quad \text{wobei } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}}$$

Es gilt $C \in [0, \sqrt{(M-1)/M}]$, wobei $M = \min(k, l)$.

Der korrigierte Kontingenzkoeffizient nach Pearson ist definiert als

$$C_K = C \sqrt{M/(M-1)}$$

Es gilt: $C_K \in [0, 1]$.

Invarianzeigenschaften der Zusammenhangsmaße

Gegeben sei eine $(k \times l)$ -Kontingenztafel der absoluten Häufigkeiten n_{ij} mit positiven Randhäufigkeiten, d.h.

$$n_{i\cdot} > 0 \text{ und } n_{\cdot j} > 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k \text{ und } j = 1, \dots, l.$$

- (i) Chi-Quadrat-Koeffizient χ^2 , mittlere quadratische Kontingenz ϕ^2 und Kontingenzkoeffizient (C und C_K) sind invariant gegenüber Zeilen- und Spaltenvertauschungen.
- (ii) Gegenüber einer Multiplikation aller Häufigkeiten n_{ij} mit $c > 0$ erweist sich χ^2 als äquivariant. Die Maße ϕ^2 , C und C_K sind dagegen invariant.

Zusammenhänge zwischen metrischen Merkmalen

Empirische Kovarianz

Für metrische Beobachtungswerte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ bezüglich zweier Merkmale X und Y berechnet sich die empirische Kovarianz als

$$\tilde{s}_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x}\bar{y}. \quad (5.2.1)$$

Die Kovarianz ist verschiebungsinvariant und auch skalenäquivariant, sofern nur eines der beiden Merkmale umskaliert wird.

Definition 5.2.1: Empirische Unkorreliertheit

x - und y -Werte heißen (**empirisch**) **unkorreliert**, wenn $\tilde{s}_{XY} = 0$ ist.

Definition 5.2.2: Empirischer Korrelationskoeffizient nach Pearson

Für metrische Beobachtungswerte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ bezüglich zweier Merkmale X und Y berechnet sich der empirische Korrelationskoeffizient als

$$r_{XY} = \frac{\tilde{s}_{XY}}{\tilde{s}_X \tilde{s}_Y} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2\right)}}$$

wobei $\tilde{s}_X > 0$ und $\tilde{s}_Y > 0$ vorausgesetzt wird. Es gilt: $r_{XY} \in [-1, 1]$. Der Korrelationskoeffizient ist verschiebungs- und skaleninvariant und misst die Stärke der linearen Abhängigkeit.

Einfache lineare Regression nach der KQ-Methode

Achsenabschnitt: $\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x}$, Steigungskoeffizient: $\hat{b}_1 = \tilde{s}_{XY} / \tilde{s}_X^2$

Einige Grundlagen

Elementare Regeln für Wahrscheinlichkeiten

Seien Ω ein Ergebnisraum und $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n$ beliebige Ereignisse. Dann gelten:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Wenn $A \subset B$, dann ist $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
5. Wenn A_1, A_2, \dots, A_n **paarweise disjunkt** sind, d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $i, j = 1, 2, \dots, n$, dann ist

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

Definition 6.2.1: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien A und B Ereignisse eines Ergebnisraumes Ω mit $P(B) > 0$. Dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B** definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist für $P(B) = 0$ nicht definiert.

Satz 6.2.1: Multiplikationsregel

Seien A_1, A_2, \dots, A_n mit $n \geq 2$ Ereignisse eines Ergebnisraumes Ω , wobei $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ sei. Dann gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \\ \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Definition 6.2.2: Abhängigkeit und Unabhängigkeit von zwei Ereignissen

Seien A und B Ereignisse eines Ergebnisraumes mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Dann sind A und B (*stochastisch*) **unabhängig** (kurz *st.u.*), falls eines der folgenden äquivalenten Kriterien erfüllt ist:

- (i) $P(A|B) = P(A)$.
- (ii) $P(B|A) = P(B)$.
- (iii) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. (**Multiplikationskriterium**)

Für $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$ definieren wir A und B ebenfalls als (stochastisch) unabhängig. In allen anderen Fällen sind A und B (*stochastisch*) **abhängig**.

Definition 6.2.3: Abhängigkeit und Unabhängigkeit von mehreren Ereignissen

Seien A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 2$) Ereignisse eines Ergebnisraumes Ω . Dann sind diese Ereignisse (*stochastisch*) **unabhängig**, falls gilt:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \text{für } i \neq j, \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad \text{für } i \neq j, j \neq k, i \neq k \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Sind nicht alle dieser Kriterien gleichzeitig erfüllt, sind die Ereignisse (*stochastisch*) **abhängig**. Ist das erste Kriterium erfüllt, sind die Ereignisse *paarweise* (*stochastisch*) **unabhängig**.

Implizierte Unabhängigkeit weiterer Ereignisse

Gegeben seien $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$ unabhängige Ereignisse eines Ergebnisraumes Ω , die sich wie folgt in p Reihen anordnen lassen:

$$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n_1}, \\ A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n_2}, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ A_{p1}, A_{p2}, \dots, A_{pn_p}.$$

Werden jeweils nur aus den Ereignissen der einzelnen Reihen neue Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_p gebildet (durch Bildung von Komplementen, Schnitten oder Vereinigungen), so sind auch die so gebildeten Ereignisse unabhängig.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien A_1, A_2, \dots, A_n paarweise disjunkte Ereignisse eines Ergebnisraumes Ω , d.h. für $i \neq j$ sei $A_i \cap A_j = \emptyset$. Weiter gelte $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ und $P(A_i) > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für jedes Ereignis $B \subset \Omega$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i).$$

Satz 6.2.2: Satz von Bayes

Angenommen, die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n bilden eine disjunkte Zerlegung des Ergebnisraumes Ω mit $P(A_i) > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für jedes Ereignis $B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zufallsvariablen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Definition 7.1.1: Diskrete Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsfunktion

Eine Zufallsvariable X heißt diskret, falls es für endlich oder abzählbar unendlich viele Werte $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ eine Funktion f_X gibt, für die gilt:

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = a_j) = p_j, & \text{für } x = a_j, j = 1, \dots, k, \dots \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

- (i) $p_j \geq 0$ für alle j und
- (ii) $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$.

Die Funktion f_X heißt dann **Wahrscheinlichkeitsfunktion** von X . Die Menge $T_X = \{a_j : p_j > 0\}$ wird als Trägermenge von X bezeichnet. Ihre Elemente heißen **Realisationsmöglichkeiten, Träger- oder Massenpunkte** von X .

Definition 7.1.2: Stetige Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Eine Zufallsvariable X heißt **stetig**, falls es eine Funktion $f_X(x)$ gibt, für die gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad \text{für alle } a \leq b, \text{ wobei}$$

- (i) $f_X(x) \geq 0$ für alle reellen x gilt und
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ ist.

Die Funktion f_X heißt dann **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, Dichtefunktion** oder **Dichte** von X . Die Menge $T_X = \{x : f_X(x) > 0\}$ wird als Trägermenge von X bezeichnet. Ihre Elemente heißen **Realisationsmöglichkeiten** von X .

Definition 7.1.3: Theoretische Verteilungsfunktion

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable. Dann ist die (theoretische) Verteilungsfunktion von X definiert als $F_X(x) = P(X \leq x)$. Daraus folgt:

- (i) Falls X diskret ist, gilt: $F_X(x) = \sum_{j: a_j \leq x} p_j$.
- (ii) Falls X stetig ist, gilt: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.

Definition 7.1.5: Gemeinsame diskrete Verteilung

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind gemeinsam diskret verteilt, falls es für endlich oder abzählbar unendlich viele 2-Tupel (a_i, b_j) mit $a_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ und $b_j \in \{b_1, b_2, \dots, b_l, \dots\}$ eine Funktion f_{XY} gibt, für die gilt:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij}, & (x, y) = (a_i, b_j), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei

- (i) $p_{ij} \geq 0$ für alle i und j und
- (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Die Funktion f_{XY} heißt dann **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion** von X und Y . Sie legt die gemeinsame Verteilung von X und Y fest. Alternativ spricht man auch vom **diskreten Zufallsvektor** (X, Y) mit der (**zweidimensionalen**) **Wahrscheinlichkeitsfunktion** f_{XY} . Die Menge $T_{XY} = \{(a_i, b_j) : p_{ij} > 0\}$ wird als Trägermenge von (X, Y) bezeichnet. Ihre Elemente heißen **Realisationsmöglichkeiten, Träger- oder Massenpunkte** von (X, Y) .

Definition 7.1.6: Diskrete Randverteilungen

Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{XY}(x, y)$. Dann sind die (eindimensionalen) Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y gegeben durch

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_j f_{XY}(x, b_j) \quad \text{bzw.}$$
$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_i f_{XY}(a_i, y).$$

Die durch f_{XY} mittels f_X und f_Y implizierten Verteilungen von X bzw. Y werden auch als **Randverteilungen** von X bzw. Y bezeichnet.

Definition 7.1.7: Bedingte diskrete Verteilungen

Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_{XY}(x, y)$. Dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von X gegeben $Y = y$** definiert als

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{für } f_Y(y) > 0$$

und die **bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y gegeben $X = x$** als

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad \text{für } f_X(x) > 0.$$

Die durch die bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen implizierten Verteilungen von X und Y werden als **bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$** bzw. **bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$** bezeichnet.

Für $f_Y(y) = 0$ bzw. $f_X(x) = 0$ sind die bedingten Wahrscheinlichkeitsfunktionen bzw. Verteilungen jeweils nicht definiert.

Definition 7.1.8: Gemeinsame stetige Verteilung

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind **gemeinsam stetig verteilt**, falls es eine Funktion f_{XY} gibt, sodass für alle reellen $a \leq b$ und $c \leq d$ gilt:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dy dx,$$

wobei

- (i) $f_{XY}(x, y) \geq 0$ und
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = 1.$

Die Funktion f_{XY} heißt dann **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**, **gemeinsame Dichtefunktion** oder **gemeinsame Dichte** von X und Y . Sie legt die **gemeinsame Verteilung** von X und Y fest. Alternativ spricht man auch vom **stetigen Zufallsvektor** (X, Y) mit der (**zweidimensionalen**) **Dichtefunktion** f_{XY} . Die Menge $T_{XY} = \{(x, y) : f_{XY}(x, y) > 0\}$ wird als **Trägermenge** von (X, Y) bezeichnet. Ihre Elemente bilden **Realisationsmöglichkeiten** von (X, Y) .

Definition 7.1.9: Stetige Randverteilungen

Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion $f_{XY}(x, y)$. Dann sind die (ein-dimensionalen) Dichtefunktionen von X und Y gegeben durch

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad \text{bzw.}$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

Die durch f_{XY} mittels der Randdichten f_X und f_Y implizierten Verteilungen von X bzw. Y werden auch als Randverteilungen von X bzw. Y bezeichnet.

Definition 7.1.10: Bedingte stetige Verteilungen

Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion $f_{XY}(x, y)$. Dann ist die **bedingte Dichte von X gegeben $Y = y$** definiert als

$$f_{X|Y} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{für } f_Y(y) > 0$$

und die **bedingte Dichte von Y gegeben $X = x$** als

$$f_{Y|X} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad \text{für } f_X(x) > 0.$$

Die durch die bedingten Dichten implizierten Verteilungen von X und Y werden als **bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$** bzw. **bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$** bezeichnet.

Für $f_Y(y) = 0$ bzw. $f_X(x) = 0$ sind die bedingten Dichten bzw. Verteilungen jeweils nicht definiert.

Stochastische Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definition 7.1.12: Stochastische Unabhängigkeit und Abhängigkeit

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig). Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) X und Y sind **stochastisch unabhängig**.
- (ii) $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f_Y(y) > 0$.
- (iii) $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f_X(x) > 0$.
- (iv) $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Kriterium (iv) ist das sog. **Multiplikationskriterium** gemäß dem sich die gemeinsame Verteilung aus dem Produkt der Randverteilungen ergibt. Trifft eine der vier Aussagen nicht zu, sind X und Y **stochastisch abhängig**.

Satz 7.1.3: Unabhängige Zufallsvariablen implizieren unabhängige Ereignisse

Sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen und A und B beliebige (messbare) Teilmengen von \mathbb{R} , dann gilt

- (i) $P(X \in A | Y \in B) = P(X \in A)$, falls $P(Y \in B) > 0$.
- (ii) $P(Y \in B | X \in A) = P(Y \in B)$, falls $P(X \in A) > 0$.
- (iii) $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Definition 7.1.13: Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Zufallsvariablen

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (diskret oder stetig) sind (**vollständig**) **stochastisch unabhängig**, falls deren gemeinsame Verteilung dem Produkt der eindimensionalen Randverteilungen entspricht, d.h. falls für alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n).$$

Trifft dieses Multiplikationskriterium nicht zu, sind sie **stochastisch abhängig**.

Satz 7.1.4: Implizierte Unabhängigkeiten

Sind die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (vollständig) unabhängig, so auch jede kleinere Teilauswahl aus diesen. Insbesondere folgt daraus die **paarweise Unabhängigkeit**.

Unabhängige Zufallsvariablen implizieren unabhängige Ereignisse. Für beliebige (messbare) Teilmengen A_1, A_2, \dots, A_n von \mathbb{R} gilt deshalb stets:

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n).$$

Satz 7.1.5: Funktionen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen

Für gegebene Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n und beliebige (messbare) Funktionen g_1, g_2, \dots, g_n ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) gilt: Sind X_1, X_2, \dots, X_n

- (i) stochastisch unabhängig, so auch $g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)$.
- (ii) identisch verteilt, so auch $g_1(X_1), g_1(X_2), \dots, g_1(X_n)$.
- (iii) stochastisch unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.), so auch $g_1(X_1), g_1(X_2), \dots, g_1(X_n)$.

Theoretische Kennwerte

Definition 7.2.1: Erwartungswert

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion f_X . Dann ist der Erwartungswert von X definiert als

- (i) $\mu_X = E(X) = \sum_j a_j P(X = a_j) = \sum_j a_j f_X(a_j)$
für diskretes X mit Realisationsmöglichkeiten $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ und
- (ii) $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
für stetiges X .

Satz 7.2.1: Erwartungswert einer Funktion einer Zufallsvariable

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion f_X und $g(x)$ eine (messbare) reellwertige Funktion, d.h. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt für $Y = g(X)$:

- (i) $E(Y) = E(g(X)) = \sum_j g(a_j) P(X = a_j) = \sum_j g(a_j) f_X(a_j)$
für diskretes X mit Realisationsmöglichkeiten $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ und
- (ii) $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$ für stetiges X .

Sei f_Y die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion von Y . Alternativ zu (i) und (ii) können wir auch rechnen:

- (i*) $E(Y) = \sum_j b_j P(Y = b_j) = \sum_j b_j f_Y(b_j)$
wobei $b_1, b_2, \dots, b_l, \dots$ die Realisationsmöglichkeiten von Y sind bzw.
- (ii*) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$.

Satz 7.2.2: Erwartungswert einer Funktion aus mehreren Zufallsvariablen

Seien X und Y zwei diskrete oder zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion f_{XY} und $g(x, y)$ eine (messbare) reellwertige Funktion, d.h. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt für $Z = g(X, Y)$:

- (i) $E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_i \sum_j g(a_i, b_j) P(X = a_i, Y = b_j)$
für diskretes $(X, Y)^T$ mit Realisationsmöglichkeiten $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_l), \dots$ und
- (ii) $E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dy dx$
für stetiges $(X, Y)^T$.

Sei f_Z die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion von Z . Alternativ zu (i) und (ii) können wir auch rechnen:

$$(i^*) E(Z) = \sum_j c_j P(Z = c_j) = \sum_j c_j f_Z(c_j),$$

wobei $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$ die Realisationsmöglichkeiten von Z sind, bzw.

$$(ii^*) E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz.$$

Satz 7.2.3: Erwartungswerte von Summen

Für n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (diskret oder stetig) und Konstanten c_0, c_1, \dots, c_n gilt:

$$E(c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n) = c_0 + c_1 E(X_1) + c_2 E(X_2) + \dots + c_n E(X_n).$$

Speziell folgt daraus für zwei Zufallsvariablen X und Y :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \quad (7.2.13)$$

Satz 7.2.4: Multiplikationsregel bei Unabhängigkeit (und Unkorreliertheit)

Für n (vollständig) unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (diskret oder stetig) gilt die **Multiplikationsregel** gemäß

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n).$$

Speziell folgt daraus für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y :

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y). \quad (7.2.14)$$

Die Multiplikationsregel gilt auch bei **Unkorreliertheit** (Abschnitt 7.2.2).

Definition 7.2.2: Theoretische Varianz und Standardabweichung

Sei X eine diskrete oder stetige Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X) = \mu_X$. Dann ist die **(theoretische) Varianz** von X definiert als

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - \mu_X^2 \quad (7.2.15)$$

und die **(theoretische) Standardabweichung** als

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}.$$

Satz 7.2.5: Varianzen von Summen bei Unabhängigkeit

Für n (vollständig) unabhängige Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n (diskret oder stetig) und Konstanten c_0, c_1, \dots, c_n gilt:

$$\text{Var}(c_0 + c_1 X_1 + \dots + c_n X_n) = c_1^2 \text{Var}(X_1) + \dots + c_n^2 \text{Var}(X_n).$$

Speziell folgt daraus für zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Diese Resultate gelten auch bei **Unkorreliertheit** (Abschnitt 7.2.2).

Definition 7.2.3: Theoretische Quantile und theoretischer Median

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit streng monotoner Verteilungsfunktion auf der Trägermenge. Dann ist das (theoretische) α -Quantil q_α bestimmt durch

$$P(X \leq q_\alpha) = \alpha \quad \text{für } \alpha \in (0, 1). \quad (7.2.19)$$

Insbesondere heißt $q_{0.5}$ **(theoretischer) Median**. Bei Zufallsvariablen mit nicht streng monotoner Verteilungsfunktion entstehen Eindeutigkeitsprobleme, die per Konvention unterschiedlich geregelt werden können.

Definition 7.2.4: Bedingte Erwartungswerte und Varianzen

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig). Dann werden Erwartungswert und Varianz der bedingten Verteilung von Y gegeben $X = x$ als **bedingter Erwartungswert von Y gegeben $X = x$** bzw. als **bedingte Varianz von Y gegeben $X = x$** bezeichnet. Dafür notiert man entsprechend

$$E(Y|X = x) \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}(Y|X = x).$$

Satz 7.2.6: Rechenregeln für den bedingten Erwartungswert

Für die Zufallsvariablen X, Y, Z , die reellen Konstanten a, b, c und die (messbaren) Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelten:

$$E(a + bX + cY|Z = z) = a + bE(X|Z = z) + cE(Y|Z = z), \quad (7.2.26)$$

$$E(g(X)h(Y)|X = x) = g(x)E(h(Y)|X = x), \quad (7.2.27)$$

sofern die angegebenen bedingten Erwartungswerte existieren.

Satz 7.2.7: Regeln bei iterierter Erwartungswertbildung

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig). Dann gilt:

- (i) $E(Y) = E[E(Y|X)]$.
- (ii) $\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[E(Y|X)]$.

Definition 7.2.5: Theoretische Kovarianz und Korrelation

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig) mit

$$E(X) = \mu_X, \quad \text{Var}(X) = \sigma_X^2, \quad E(Y) = \mu_Y, \quad \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2.$$

Dann ist die **(theoretische) Kovarianz** zwischen X und Y definiert als

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - \mu_X\mu_Y \quad (7.2.28)$$

und der **(theoretische) Korrelationskoeffizient** als

$$\rho_{XY} = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Dabei gilt: $\rho_{XY} \in [-1, 1]$.

Definition 7.2.6: Theoretische Kleinste-Quadrate-Regression

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y (diskret oder stetig) mit

$$E(X) = \mu_X, \text{Var}(X) = \sigma_X^2, E(Y) = \mu_Y, \text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY}.$$

Dann sind die **theoretischen KQ-Reggressionskoeffizienten** definiert als

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1 &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \text{ und} \\ \bar{\beta}_0 &= E(Y) - \bar{\beta}_1 E(X) = \mu_Y - \bar{\beta}_1 \mu_X.\end{aligned}$$

Die **theoretische KQ-Reggressionsgerade** lautet dann

$$\bar{y}(x) = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_1 x.$$

Satz 7.2.8: Minimumeigenschaft des Erwartungswerts

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2 . Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] \leq E[(X - c)^2].$$

Satz 7.2.9: Minimumeigenschaft des theoretischen Medians

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit theoretischem Median $q_{0.5}$. Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$:

$$E[|X - q_{0.5}|] \leq E[|X - c|].$$

Wichtige Transformationseigenschaften theoretischer Kennwerte

Für Erwartungswert, Varianz, Kovarianz und Korrelation von Zufallsvariablen gelten folgende Transformationsregeln:

- (1) $E(X + c) = E(X) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (2) $E(cX) = cE(X)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (3) $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (4) $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$ für jedes $c \in \mathbb{R}$.
- (5) $\sqrt{\text{Var}(cX)} = c\sqrt{\text{Var}(X)}$ für jedes $c > 0$.
- (6) $\text{Cov}(X + c_X, Y + c_Y) = \text{Cov}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$.

(7) $\text{Corr}(X + c_X, Y + c_Y) = \text{Corr}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$.

(8) $\text{Cov}(c_X X, c_Y Y) = c_X c_Y \text{Cov}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y \in \mathbb{R}$.

(9) $\text{Corr}(c_X X, c_Y Y) = \text{Corr}(X, Y)$ für alle $c_X, c_Y > 0$.

Insbesondere folgen daraus die zu den entsprechenden empirischen Kennwerten völlig analogen Äquivarianz- und Invarianzeigenschaften in Bezug auf Verschiebungen und Umskalierungen.

Spezielle eindimensionale Verteilungen

Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **Bernoulli-verteilt** mit Parameter $\pi \in (0, 1)$, kurz $X \sim \mathbf{B}(1, \pi)$, wenn gilt:

$$P(X = 0) = 1 - \pi \quad \text{und} \quad P(X = 1) = \pi.$$

Die korrespondierende Verteilung heißt **Bernoulli-Verteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \pi \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \pi(1 - \pi).$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsvariable S_n heißt **binomialverteilt** mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in (0, 1)$, kurz $S_n \sim \mathbf{B}(n, \pi)$, wenn gilt:

$$P(S_n = s) = \binom{n}{s} \pi^s (1 - \pi)^{n-s} \quad \text{für } s = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Die korrespondierende Verteilung heißt **Binomialverteilung**. Dabei gilt:

$$E(S_n) = n\pi \quad \text{und} \quad \text{Var}(S_n) = n\pi(1 - \pi).$$

Zusammenhang zwischen Binomialverteilung und Poisson-Verteilung

Eine $B(n, \pi)$ -verteilte Zufallsvariable S_n ist für „kleines“ π und „großes“ n approximativ $Po(\lambda)$ -verteilt mit $\lambda = n\pi$. Es gilt dann also:

$$P(S_n = s) = \binom{n}{s} \pi^s (1 - \pi)^{n-s} \approx \frac{\lambda^s}{s!} e^{-\lambda}.$$

Die Approximation ist für $\pi < 0.05$ und $n \geq 30$ hinreichend gut.

Poisson-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **poissonverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, kurz $X \sim \mathbf{Po}(\lambda)$, wenn gilt:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad \text{für } x = 0, 1, 2, \dots$$

Die korrespondierende Verteilung heißt **Poisson-Verteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \lambda \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Zusammenhang zwischen Poisson-Verteilung und Exponentialverteilung

Sei X die Anzahl des Auftretens eines bestimmten Ereignisses in einem bestimmten Zeitfenster, dessen Länge in einer bestimmten Einheit gemessen wird. Ist X $Po(\lambda)$ -verteilt, so ist die in der gleichen Einheit gemessene Wartezeit zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen $Exp(\lambda)$ -verteilt.

Exponentialverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heißt **exponentialverteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, kurz $X \sim Exp(\lambda)$, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0, \infty)}(x)$$

besitzt. Die korrespondierende Verteilung heißt **Exponentialverteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung:

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) I_{[0, \infty)}(x)$$

Stetige Gleichverteilung

Für $a < b$ heißt eine Zufallsvariable X **auf $[a, b]$ stetig gleichverteilt**, kurz $X \sim G(a, b)$, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a, b]}(x)$$

besitzt. Die korrespondierende Verteilung heißt **stetige Gleichverteilung** oder **Rechteckverteilung**. Dabei gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Zusammenfassung für die Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, kurz $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

besitzt. Speziell heißt die $N(0, 1)$ -Verteilung auch **Standardnormalverteilung**. Mit φ bezeichnen wir die Dichte der Standardnormalverteilung. Für die Verteilungsfunktion F_X einer $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable X gilt:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet, deren Werte aus Verteilungstabellen (vgl. A.1) abgelesen werden können. Außerdem gilt:

$$q_\alpha = \mu + \sigma \cdot z_\alpha,$$

wobei q_α das theoretische α -Quantil einer $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung und z_α das theoretische α -Quantil der $N(0, 1)$ -Verteilung bezeichnet.

Erwartungswerte und Varianzen von Summen und Mittelwerten

Erwartungswerte und Varianzen von Summen und Mittelwerten

Für n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit $E(X_i) = \mu_i$ und $Var(X_i) = \sigma_i^2$ für $i = 1, \dots, n$ gelten folgende Aussagen allgemein bzw. bei Vorliegen von identischen Erwartungswerten bzw. Varianzen:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad \text{bzw.} \quad E(S_n) = n\mu, \quad (7.4.14)$$

$$E(\bar{X}_n) = \bar{\mu}_n \quad \text{bzw.} \quad E(\bar{X}_n) = \mu, \quad (7.4.15)$$

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Cov(X_i, X_j), \quad (7.4.16)$$

d.h. speziell für $n = 2$:

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2).$$

Sind X_1, \dots, X_n paarweise unkorreliert, so gilt:

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad \text{bzw.} \quad Var(S_n) = n\sigma^2, \quad (7.4.17)$$

$$Var(\bar{X}_n) = \bar{\sigma}_n^2/n \quad \text{bzw.} \quad Var(\bar{X}_n) = \sigma^2/n. \quad (7.4.18)$$

Insbesondere gelten die letzten Resultate in (7.4.14), (7.4.15), (7.4.17) und (7.4.18), falls X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.) sind.

Verteilung von Summen und Mittelwerten bei Normalverteilung

Sind X_1, \dots, X_n unabhängig mit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ für $i = 1, \dots, n$, dann gilt:

$$c_0 + c_1X_1 + \dots + c_nX_n \sim N(c_0 + c_1\mu_1 + \dots + c_n\mu_n, c_1^2\sigma_1^2 + \dots + c_n^2\sigma_n^2). \quad (7.4.21)$$

für beliebige Konstanten c_0, c_1, \dots, c_n , wobei mindestens ein $c_i \neq 0$ für $i > 0$ sei. Speziell folgt daraus:

$$S_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) \quad \text{bzw.} \quad (7.4.22)$$

$$\bar{X}_n \sim N(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n^2/n). \quad (7.4.23)$$

Sind X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt:

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad \text{bzw.} \quad (7.4.24)$$

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n). \quad (7.4.25)$$

Asymptotische und approximative Aussagen

Satz 7.4.1: Schwaches GGZ für u.i.v. Zufallsvariablen

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für jedes $c > 0$:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{bzw.} \quad P(|\bar{X}_n - \mu| > c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Man sagt, das (stochastische) Mittel **konvergiert stochastisch (nach Wahrscheinlichkeit)** gegen μ . Dafür schreibt man auch kurz

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu.$$

Satz 7.4.2: Satz von Bernoulli

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt und sei $A \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges (messbares) Ereignis. Definiere

$$Y_i = I_A(X_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dann sind Y_1, \dots, Y_n unabhängig $B(1, \pi)$ -verteilt mit $\pi = P(X_i \in A)$, und die (stochastische) relative Häufigkeit des Ereignisses A konvergiert stochastisch gegen die Wahrscheinlichkeit von A , d.h.

$$\bar{Y}_n \xrightarrow{P} P(A).$$

Satz 7.4.3: Zentraler Grenzwertsatz nach Lindeberg-Lévy

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ mit $0 < \sigma^2 < \infty$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \quad \text{asymptotisch } N(0, 1)\text{-verteilt,} \quad (7.4.30)$$

d.h.

$$P(Z_n \leq x) = F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}, \quad (7.4.31)$$

wobei F_{Z_n} die Verteilungsfunktion von Z_n und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Wir schreiben dafür auch kurz

$$Z_n \stackrel{a}{\sim} N(0, 1). \quad (7.4.32)$$

Summe und Mittelwert sind damit für großes n **approximativ normalverteilt**. Konkret gelten folgende Approximationen:

$$S_n \stackrel{approx}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2), \quad (7.4.33)$$

$$\bar{X}_n \stackrel{approx}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n). \quad (7.4.34)$$

Als **Daumenregel** verwenden wir $n \geq 30$ gilt als „groß“.

Satz 7.4.4: Grenzwertsatz nach de Moivre

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig $B(1, \pi)$ -verteilt. Dann gilt:

$$Z_n = \frac{S_n - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}} = \frac{\bar{X}_n - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1), \quad (7.4.36)$$

$$S_n \stackrel{approx}{\sim} N(n\pi, n\pi(1-\pi)) \quad \text{für großes } n \text{ und} \quad (7.4.37)$$

$$\bar{X}_n \stackrel{approx}{\sim} N(\pi, \pi(1-\pi)/n) \quad \text{für großes } n. \quad (7.4.38)$$

Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung

Tab. A.1: Wertetabelle der Standardnormalverteilung

Tabelliert sind die Werte der Verteilungsfunktion der Normalverteilung, $\Phi(z)$.

Ablesebeispiel: $\Phi(1.23) = \Phi(1.2 + 0.03) \approx 0.8907$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000