

Übungsaufgaben Mathevorkurs

Stand: 18. September 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Arithmetik	3
1.1	Ausklammern/Ausmultiplizieren	3
1.2	Erweitern/Kürzen	4
1.3	Primfaktoren	5
1.4	Bruchrechnung	7
1.5	Binomische Formeln	9
1.6	Faktorisieren	10
1.7	Potenzen	11
1.8	Wurzeln	12
1.9	Logarithmen	14
1.10	Vereinfachen	16
2	Mengenlehre	17
3	Ableitungen	20
3.1	Einfache Ableitungen	20
3.2	Summenregel	20
3.3	Produktregel	21
3.4	Quotientenregel	21
3.5	Kettenregel	21
4	Funktionen und Ableitungen mit einer unabhängigen Variable	22
5	Gleichungen und Ungleichungen	24
6	Lineare Gleichungssysteme	26
7	Lineare Algebra	28

1 Arithmetik

1.1 Ausklammern/Ausmultiplizieren

Klammern Sie aus (soweit wie möglich)!

1. $8 + [(9 - 2) - (1 + 8)]$
2. $-2 \cdot [(3 - 7) - (9 + 1)]$
3. $(a + b) : (c + d)$
4. $x(x + y)(x - z)(x + 3)$
5. $(9 - a)(b + c) - ac$
6. $(x - b)(x + a)(x + b)$
7. $7 \cdot (8 - 2a)(b + 5 \cdot 19)$
8. $\frac{1}{2}a(t - 1)^2$
9. $K_0 \cdot \left(\frac{100 + p}{100} - w \right) (1 - t)$
10. $\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - bn)$

Klammern Sie ein!

1. $6 \cdot 3 - 3 \cdot 9 \cdot 2$
2. $2 \cdot 13 + 13 \cdot 4 - 1 \cdot 13 - 1 \cdot 13$
3. $D \cdot \left(\frac{6\pi}{D} - \pi \left(\frac{m}{D^2} - \frac{B^3}{D^2} \right) \cdot D \right)$
4. $x^2 - 3x + 2$ Tipp: Nutzen Sie die Nullstellen!
5. $x^2 - 2nx + n^2 + d$
6. $16y^2 - stx + sy^2t - (4\sqrt{x})^2$
7. $\frac{cf^{-1}}{a+b} + \frac{3}{fa+bf} - \frac{\phi}{f(a+b)}$
8. $e^2 - \pi^2$
9. $R_H \cdot \frac{c}{-2n + n^2 + 1} - c \frac{1}{m^2} \cdot R_H$
10. $\frac{v^2}{100} + 0.4v + 4 + \frac{3}{10}v + 6$ Tipp: Klammern Sie $(v + 20)$ aus!
11. $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}$

1.2 Erweitern/Kürzen

Kürzen Sie so weit wie möglich!

1. $\frac{2}{8}$
2. $\frac{72}{24}$
3. $\frac{36}{30}$
4. $\frac{12}{6}$
5. $\frac{24}{30}$
6. $\frac{15}{25}$
7. $\frac{40}{72}$
8. $\frac{28}{20}$
9. $\frac{10}{2}$
10. $\frac{14}{7}$
11. $\frac{8}{16}$
12. $\frac{18}{864}$
13. $\frac{24}{368}$
14. $\frac{46}{16}$
15. $\frac{8}{4}$
16. $\frac{480a}{16a^2}$
17. $\frac{434x}{7}$
18. $\frac{291x^2y}{3xy}$
19. $\frac{360e^{-x^2}}{28e^{-x^2}}$
20. $\frac{AUGE}{HAND}$

Erweitern Sie auf den kleinstmöglichen, gleichen Nenner!

1. $\frac{5}{12}, \frac{9}{27}$
2. $\frac{2}{15}, \frac{8}{23}$
3. $\frac{9}{2}, \frac{9}{71}$
4. $\frac{1}{7}, \frac{8}{12}$
5. $\frac{1}{8}, \frac{2}{5}$
6. $\frac{7}{2 \sin x}, \frac{3}{2 \cos x}$
7. $\frac{3t}{8a}, \frac{5a}{8t}$
8. $\frac{5\pi e^\phi}{4}, \frac{8}{9\pi}$
9. $\frac{7x^2}{2}, \frac{3}{4x}$
10. $\frac{9}{7a}, \frac{7}{9b}$

Ordnen Sie der Größe nach!

1. $\frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{9}{6}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}, \frac{8}{12}$
2. $\frac{4}{6}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{6}$
3. $\frac{13}{10}, \frac{7}{12}, \frac{9}{4}, \frac{13}{13}, \frac{14}{11}, \frac{15}{11}, \frac{11}{9}, \frac{9}{12}, \frac{11}{4}, \frac{6}{10}$

1.3 Primfaktoren

Finden Sie folgende Primfaktorzerlegungen! Es bietet sich an, einen Taschenrechner und eine Tabelle mit Primzahlen bis 100 zu benutzen.

1. 44880
2. 5980
3. 600
4. 30132
5. 1794
6. 5472
7. 7400
8. 1815
9. 16800
10. 6552
11. 216200
12. 83980
13. 669465
14. 35400
15. 19855
16. 363440
17. 310420
18. 704700
19. 91195
20. 27230
21. 551862
22. 21318
23. 346500
24. 480
25. 30240
26. 303600

Ein Affe besitzt 500 Erdnüsse. Da er die nicht alleine essen kann, hat er 9 Freunde eingeladen, um zu teilen. Um Streit zu vermeiden, möchte er, dass die Nüsse gleichmäßig unter allen Anwesenden aufgeteilt werden. Dabei weiß er aber nicht, ob alle seine Freunde tatsächlich kommen werden. Seine Mutter bietet ihm an, falls er noch mehr Erdnüsse brauche, die restlichen aus ihrem Vorrat beizusteuern. Um wie viele Erdnüsse sollte der Affe seine Mutter bitten?

Finden Sie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgv)!

1. $kgv(14, 2)$
2. $kgv(4, 32)$
3. $kgv(21, 5)$
4. $kgv(40, 20)$
5. $kgv(15, 13)$
6. $kgv(19, 5)$
7. $kgv(24, 20, 16)$
8. $kgv(39, 7, 13)$
9. $kgv(30, 26, 38)$
10. $kgv(3, 22, 11)$
11. $kgv(29, 27, 2)$
12. $kgv(24, 28, 37)$
13. $kgv(16, 6, 13, 21)$
14. $kgv(12, 40, 24, 29)$
15. $kgv(30, 20, 3, 11)$

Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT)!

1. $ggT(12, 6)$
2. $ggT(12, 40)$
3. $ggT(100, 108)$
4. $ggT(4, 86)$
5. $ggT(52, 48)$
6. $ggT(532, 736)$
7. $ggT(543, 969)$
8. $ggT(5, 530)$
9. $ggT(839, 226)$
10. $ggT(982, 841)$
11. $ggT(250, 86, 826)$
12. $ggT(612, 810, 504)$
13. $ggT(451, 946, 99)$
14. $ggT(180, 383, 49, 886)$
15. $ggT(731, 68, 714, 357)$

1.4 Bruchrechnung

Berechnen Sie, ggf. kürzen Sie das Ergebnis!

1. $\frac{5}{2} + \frac{17}{14}$

2. $\frac{2}{3} + \frac{2}{22}$

3. $\frac{4}{5} - \frac{5}{8}$

4. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

5. $\frac{7}{4} - \frac{4}{8}$

6. $\frac{3}{8} + \frac{2}{7}$

7. $\frac{3}{7} + \frac{7}{1}$

8. $4\frac{5}{9} - 2\frac{8}{7}$

9. $\frac{1}{5} - \frac{6}{7}$

10. $\frac{43}{45} - \frac{42}{51} + \frac{41}{63}$

11. $\frac{6a}{8z} + \frac{7}{4z}$

12. $\frac{19}{8} + \frac{6}{30}$

13. $\frac{\alpha\beta\gamma}{2\gamma} + \frac{0.5\alpha}{\frac{1}{\beta}}$

14. $\frac{5}{6}\pi + \frac{2}{7}\pi$

15. $\frac{5(x+3)^2}{3(x+3)(x-3)} + \frac{3(x-3)^2}{4(x-3)(x-4)}$

16. $\frac{4}{x} - \frac{x}{4}$

17. $\frac{17}{9} - \frac{13}{6}$

18. $\frac{5}{8} - \frac{2}{7}$

19. $\frac{7}{2} - \frac{\frac{7}{3} \cdot 2\pi \cdot 9}{6 \cdot 7\pi}$

20. $\frac{a}{b} - \frac{b-b^2}{b^2}$

Füllen Sie die Lücken!

1. $\frac{7}{2} \cdot \bar{7} = 3$

2. $\frac{8}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

3. $\frac{25}{18} \cdot \frac{27}{2} = \frac{5}{2}$

$$4. \frac{8}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$$

$$5. \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$6. \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{8} =$$

$$7. \frac{7}{2} = \frac{49}{8}$$

$$8. \frac{8x}{5y} \cdot \frac{16x}{3y^3} =$$

$$9. \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$$

$$10. \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{18}$$

$$11. \frac{7}{8} \cdot \frac{21}{64} =$$

$$12. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{12} =$$

1.5 Binomische Formeln

Wenden Sie die binomischen Formeln an!

1. $(9c + 8D)^2$

2. $(a - 9)(a + 16) - \left(a + \frac{7}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{7}{4}\right)^2$

3. $(5G - 6.55 \cdot 10^9)^2$

4. $(8\gamma - \Psi)^2$

5. $n(\epsilon + \delta)(\delta - \epsilon)$

6. $(c + d + e)^2$

7. $(a - b)^4$

8. $(x^n + x^{n-1})^2$

9. $(1 + 2 + \dots + n)^2$ = [Tipp: Wenden Sie ihre Lösung aus Aufgabe 7 an]

Bestimmen Sie die folgenden Terme unter Zuhilfenahme der binomischen Formeln (ohne Taschenrechner)!

1. $13^2 - 7^2$

2. 24.99^2

3. 1.69^2

4. 11.2^2

5. $321^2 - 123^2$

6. 5.05^2

1.6 Faktorisieren

1. $x^2 + 14x + 45$
2. $9x^2 + 54x - 144$
3. $-5x^2 + 45x - 100$
4. $4x^2 - 4x - 24$
5. $x^2 - x - 72$
6. $2x^2 - 18x + 16$
7. $x^2 - 7x + 12$
8. $7x^2 + 77x + 168$
9. $-4x^2 + 12x + 112$
10. $-5x^2 - 55x - 150$
11. $x^2 + 9x - 136$
12. $10x^2 - 260x + 1600$
13. $-5x^2 - 115x - 510$
14. $8x^2 + 144x + 520$
15. $-9x^2 - 72x + 585$
16. $x^2 + 21x + 108$
17. $-x^2 - 14x + 147$
18. $-7x^2 + 168x - 665$
19. $x^2 - 29x + 138$
20. $x^3 - x^2 - x + 1$
21. $x^3 - 8x^2 - 100x + 800$
22. $x^3 + (b - c - d)x^2 + (cd - bc - bd)x + bcd =$
23. **Q:** Wie müssen sich die Parameter m, n und o verhalten, damit sich
 - (a) die erste
 - (b) die zweite
 - (c) die drittebinomische Formel auf die Formel $ma^2 + nab + ob^2$ anwenden lassen?

1.7 Potenzen

Schnell & im Kopf.

1. 3^3
2. 2^5
3. 5^3
4. 3^4
5. $2^5 \cdot 3^5$
6. $3^3 \cdot 5^2$
7. $2^3 \cdot 3^2$
8. $2^2 \cdot 3 \cdot 5$
9. $2^2 \cdot 3 \cdot 7$
10. $2^4 \cdot 3^2$
11. $2 \cdot 3^2 \cdot 11$
12. $2^5 \cdot 6$

Vereinfachen Sie!

1. $(a^5 + a^7)^{2+3^2}$
2. $(2^c + 2^c)^{2^c}$
3. $\frac{14^6}{49^5}$
4. $\frac{(3^6 \cdot 11^3)^7 \cdot (2 \cdot 5^3)^6}{(6^2 \cdot (45)^6 \cdot 11^7)^3}$
5. $\frac{9^3 \cdot 5^{6\pi} \cdot 14^2 \cdot 8 \cdot 2019}{4 \cdot (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5^8})^{3\pi} \cdot 673 \cdot 147}$
6. $\frac{mA^3n^2n^3(He)^5iM^2}{RH^2e^7in^5 \cdot (Ne^{11}c^{-1}K^{-3}AR^{-1})^2}$
7. $(3^3 \cdot 3^4 + 3^5 - 3^8 : 3^4 + 3^3 - \sqrt{3^5} \cdot 3^{\frac{7}{2}}) : 3$
8. $\frac{18 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 12}{22 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 19}$
9. $\frac{(2^3 + 2^5)^3 \cdot 5^{-0.5}}{\sqrt{8}}$
10. $\left[(x^2 + 2xy)(x - z)^2 + (zy)^2 + x^2y^2 - 2xy^2z \right]^{-\frac{1}{2}}$

1.8 Wurzeln

Lösen, ggf. vereinfachen Sie!

1. $\sqrt{169}$

2. $\sqrt{0.04}$

3. $\sqrt{576}$

4. $\sqrt{0.0196}$

5. $\sqrt{2116}$

6. $\sqrt{888}$

7. $\sqrt{\frac{625}{729}}$

8. $\sqrt{216}$

9. $\sqrt{\frac{484}{900}}$

10. $\sqrt{567}$

11. $\sqrt{0.000625}$

12. $\sqrt{\frac{441}{115600}}$

Füllen Sie die Tabelle aus! Alle Elemente sind natürliche Zahlen.

a	5	1	6
$\sqrt[3]{a^2 - 1}$	$\sqrt[4]{15}$	2	$\sqrt{3}$

Lösen Sie folgende Gleichungen! Zusätzliche Bedingung seien $x, y \in \mathbf{N}$;
 $x, y \in [0, 9]$

1. $\sqrt{200 + 10x + 5} = 15$

2. $\sqrt{100x + 61} = 19$

3. $\sqrt{100 + 4(x + 4)} = 14$

4. $\sqrt{100 + 20x + y} = 10 + x$

Finden Sie l und v ! Nutzen Sie dafür einen Taschenrechner.

$$m = 12 \text{ kg}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h = 10 \text{ m}$$

$$D = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$W = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} D \cdot l^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Vereinfachen Sie so, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht! (Achtung, schwer)

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Q: Im antiken Griechenland gab es einen würfelförmigen Altar mit dem Volumen einer Kubikelle. Ein Orakel rät, um den bevorstehenden Krieg zu gewinnen, einen zweiten Altar zu bauen. Dieser soll aber genau das doppelte Volumen haben wie der schon bestehende Altar, aber immer noch in der Form eines Würfels sein. Kommentieren Sie über die Erfolgsaussichten dieser Unternehmung!

1.9 Logarithmen

Vereinfachen Sie!

1. $\log_c a + \log_c b$

2. $\log_c a - \log_c b$

3. $t \log_c a$

4. $\frac{1}{t} \log_c a$

5. $\frac{\log_a b}{\log_a c}$

6. $\ln e^3$

7. $\ln e^{\ln 3}$

8. $\ln(27e^{3\ln 3}) = \ln((3e^{\ln 3})^3)$

9. $\ln \sqrt[3]{x}$

10. $\ln e^{-(x^2)}$

11. $\ln(x^2 - 1) + \ln(x^2 - 1)$

12. $e^{e^{\ln e^{\ln e^{\ln e^5 - 1}}}}$

13. $2^{(\log_3 4)^{(\log_2 3)}}$

14. $e^{-\ln x}$

15. $\ln(10e^{5x} - 8) - \frac{1}{\log_2 e} = \ln(10e^{5x} - 8) - \frac{\log_2 2}{\log_2 e}$

16.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

17. $\ln(x+4) + \ln(x+4) - \ln x + \ln \frac{1}{4}$

18. $\ln e^{ax^2+bx+c} \cdot \ln e^x$

19. $\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{\alpha}$

20. $g(x) = \ln(ae^{\kappa f(x)}) \pm \ln(be^{\kappa h(x)})$

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf!

1. $\log_2 x^3 = 5 \Rightarrow x$

2. $\log_{\frac{1}{2}} x^3$

3. $\ln(7x - 13) = 0 \Rightarrow x$

4. $\log_{\frac{1}{x}} a = c \Rightarrow x$

5. $2 \ln x - \ln(3 + x) - \ln(x - 3)$

6. $\ln 1 = \ln \sin x \Rightarrow x$

Q: Die Ableitung einer Funktion $f(x) = a^x$ sei $f'(x) = \sqrt{a} \cdot a^x$.

Bestimmen Sie a ! **Q(Achtung, schwer):** Zeichnen Sie eine Skizze, um zu beweisen, dass $f'(x) = \frac{1}{x}$ für eine Funktion $f(x) = \ln x$ gelten muss. **Tipp:** Benutzen Sie die Ableitung Basis der Exponentialfunktion e^x ; skizzieren Sie $f(x) = \ln x$ und $g(x) = g'(x) = e^x$, hilfreich ist ebenfalls die Hauptwinkelhalbierende $y = x$.

1.10 Vereinfachen

Vereinfachen Sie!

1. $(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$

2. $\frac{ax^2y^2 + bx^{\frac{5}{2}}y + c^2xy}{ab^2xy + x(2yab + yac^2)}$

3. $\frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h}$

4. $e^{\frac{2yx^3 - 2x}{2xy}}$

5. $a^{a^c b^{-x} a^x \cdot \log_{\frac{1}{a}} x}$

6. $\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}(yx + 1)}{x^{\frac{3}{2}}}$

7. $\ln x^2 + \ln x - \ln(-x)$

8. $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$ Tipp: Sie können ausklammern, wenn Sie eine bestimmbare Anzahl gleicher Elemente haben \Rightarrow Finden Sie gleiche Elemente!

9. $\frac{(4(\kappa + 1) + \kappa^2)(\kappa^2 + 4(1 - \kappa))}{\kappa^3 + 4\kappa^2 - 4\kappa - 16}$

10. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$

11. $\sqrt{n^{-1}m^2} \sqrt{m^{\log_m n^3}} m^{\frac{1}{3}} n^{x^2} n^{x^2}$

12. $\sqrt{(e^d)^x + a^2 + x(b - c^2) + x(c^2 - b) - (e^x)^{\ln e \cdot d}}$

13. **Q:** Denken Sie an eine Zahl. Addieren Sie 1, quadrieren Sie dies nun und verdoppeln Sie das Ergebnis danach. Ziehen Sie nun das Quadrat der ursprünglichen Zahl ab und addieren sie 2 dazu. Quadrieren Sie das Ergebnis.

Wie lässt sich dieser Auftrag vereinfachen?

14. $\frac{u\sqrt{n} - u - \sqrt{u^3}}{\sqrt{nu} + u\sqrt{u}} + \frac{\sqrt{n} + u + \sqrt{u^3n}}{n + u\sqrt{n}} =$

2 Mengenlehre

Aufgabe 1: Finden Sie die Mächtigkeit folgender Mengen.

1. $M := \{8, 10, 2\}$
2. $F := \{1, 2, \dots, 10\}$
3. $R := \{2, 4, 6, \dots\}$
4. $X := M \cap F$
5. $Z := M \cup F$
6. $L := \{a, b\}$

Aufgabe 2: Finden Sie die Potenzmenge folgender Mengen.

1. $Y := \{0, 1\}$
2. $W := \{10, 11, 12, 13\}$
3. $X := Y \cup W$
4. $R := Y \cap W$
5. $L := \{a, b, c\}$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgende Aufgaben.

$$A := \{1, 2, 5, 7\}$$

$$B := \{1, 2, \dots, 10\}$$

$$C := \{3, 6, 8\}$$

$$D := \{0, 1, 2\}$$

$$E := \{x, y\}$$

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A \cap C$
4. $B \setminus C$
5. $A \cup C$
6. $A \cap D$
7. $A \setminus D$
8. $B \setminus D$
9. $C \cup D$
10. $D \times E$

Aufgabe 4: Ist die Aussage falsch oder richtig?

$$A := \{1, 2, 3\}$$

$$B := \{1, 2, \dots, 10\}$$

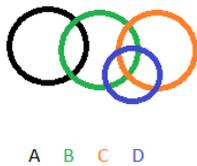
$$C := \{0, 7, 10\}$$

$$D := \{4, 5, \dots, 10\}$$

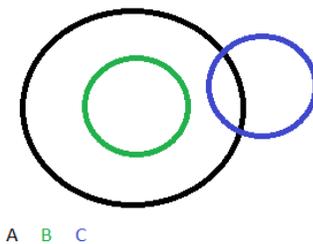
$$E := \{-1, 0\}$$

1. $A \cup B = B$
2. $A \cap B = A$
3. $A^C = D$
4. $A \cap D = B$
5. $B \subset A$
6. $A \not\subset B$
7. $(C \cup E) \setminus C = E$
8. $D^C = A \cup E$
9. $(B \cap C) \cap E = E \cap C$
10. $(A \cap B)^C = D$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie in den folgenden Diagrammen die folgenden Mengen.

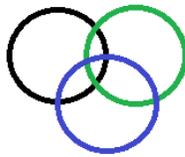


1. $(A \cup B \cup C) \cap D$



2. $B^C \cap A \setminus C$

3. $((A \cup C) \cap C) \cap B$



A B C

3 Ableitungen

3.1 Einfache Ableitungen

Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = 5$

2. $f(x) = x$

3. $f(x) = 5x$

4. $g(x) = x^2$

5. $f(x) = 4x^3$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$

7. $f(x) = -\frac{4}{x^2}$

8. $f(x) = e^x$

9. $f(x) = \ln x$

10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

11. $f(x) = \sqrt[8]{x^2}$

Bilden sie die zweite Ableitung!

1. $f(x) = 5$

2. $f(x) = x$

3. $f(x) = 5x$

4. $g(x) = x^2$

5. $f(x) = 4x^3$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$

7. $f(x) = -\frac{4}{x^2}$

8. $f(x) = e^x$

9. $f(x) = \ln x$

10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

11. $f(x) = \sqrt[8]{x^2}$

3.2 Summenregel

Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = 4x^2 - 3x$

2. $f(x) = \frac{3}{x} + 4x^3$

3. $f(x) = e^x + \ln x$

3.3 Produktregel

Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = e^x 4x^2$

2. $f(x) = a^2 x^4 \ln x$

3. $f(x) = a^x \ln x$

4. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} e^x$

3.4 Quotientenregel

Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = \frac{4x^2+1}{3x}$

2. $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

3. $f(x) = \frac{4x^2 e^x}{4x^4-1}$

4. $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2+1}$

3.5 Kettenregel

Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = e^{x^2}$

2. $f(x) = (x^3 - 4x)^4$

3. $f(x) = (3x^4 - 5)^{\frac{1}{2}}$

4. $f(x) = e^{\ln x^2}$

4 Funktionen und Ableitungen mit einer unabhängigen Variable

Aufgabe 1: Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = 13x^4 + 5x^2 - 3$

2. $f(x) = \sqrt{x} - 14x^3 + \ln(x^2)$

3. $f(x) = \frac{1}{4x}$

4. $f(x) = 6x^2 - x$

5. $f(x) = x \cdot \ln(x)$

6. $f(x) = 4\sqrt{x}$

7. $f(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x}$

8. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

9. $f(x) = \sin(x) \cdot x^2$

10. $f(x) = \cos(2x + 1)$

11. $f(x) = \sqrt{x}$

12. $f(x) = \frac{2x + 1}{2x - 1}$

13. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

14. $f(x) = e^x$

15. $f(x) = 4^x$

16. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

Aufgabe 2: Berechnen Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - 4x - 7$

2. $f(x) = 5 \ln(x)$

3. $f(x) = x^6 - \frac{3}{2x}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle Nullstellen sowie den y-Achsenabschnitt folgender Funktionen.

1. $y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - 4$

2. $y = 16x^4 - 40x^2 + 9$

3. $y = 2x^5 - 8x^3$

4. $y = \cos(1 + x) - \frac{1}{2}$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Werte- und Definitionsmenge folgender Funktionen.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^2 + 3$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = x^3 + 2$
6. $f(x) = \ln(x)$
7. $f(x) = \frac{2}{x+1}$
8. $f(x) = \sin(x)$
9. $f(x) = \cos(x)$
10. $f(x) = 3x + 1$
11. $f(x) = e^x$

5 Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 1: Lösen Sie die linearen Gleichungen.

1. $3x - 5 = 10$

2. $6x - 3 = 3x + 6$

3. $\frac{5}{4}x + 3 = \frac{1}{4}x$

4. $3(2x - 10) = 6$

5. $-3 + 5 \cdot 3x = 2$

6. $-(3 + 5) \cdot 3x = 2$

7. $-(x + 5) = 10$

8. $\frac{2}{3}x + 4 = \frac{5}{6}x - 2$

Aufgabe 2: Lösen Sie die quadratischen Gleichungen.

1. $5x^2 - 20 = 0$

2. $x^2 + 3x = 10$

3. $x^2 - 4x + 4 = 0$

4. $4x^2 = 1$

5. $x^2 = 2x - 6$

6. $\frac{1}{x}(3x^3 + x^2) = 0$

Aufgabe 3: Lösen Sie die Potenz- und Exponentialgleichungen.

1. $8x^3 = 35$

2. $x^4 + 5 = 0$

3. $5x^3 - 40 = 0$

4. $2^x - 8 = 0$

5. $5^x - 25 = 100$

6. $2^x - 30 = 2$

Aufgabe 4: Lösen Sie die Gleichungen.

1. $5x - 10 = 0$

2. $5x^2 + 3x = 0$

3. $6(3x - 2) = 5(2x + 4)$

4. $x^{\frac{1}{2}} = 4$

5. $3^x = 27$

6. $x^2 - 6x = -9$

7. $\frac{1}{2}x = \frac{2}{5}x + 3$

8. $x^{\frac{1}{4}} = 3$

9. $2^x - 2 = 14$

10. $-x^2 + 4x - 5 = 0$

Aufgabe 5: Lösen Sie die Ungleichungen und schreiben Sie die Lösung in Mengenschreibweise.

1. $5x + 3 < 8$

2. $6x - 4 \leq 4$

3. $6x + 5 \leq 8x - 4$

4. $-5x \leq 20$

5. $5x - 6 < 4x - 5$

6. $cx + 5 < 8$

Aufgabe 6: Lösen Sie die Gleichungen mit Absolutbetrag und schreiben Sie die Lösung in der Mengenschreibweise.

1. $x < |6x + 5|$

2. $x > |8x - 4|$

3. $2x > |x + 3|$

6 Lineare Gleichungssysteme

Hinweis: Üblicherweise sind zu den VWL-Klausuren der Universität Mannheim nur Taschenrechner zugelassen, die **keine** Möglichkeit zum automatischen Lösen von linearen Gleichungssystemen (LGS) haben. Diese Aufgaben sind darauf zugeschnitten, solch einen „einfachen“ Taschenrechner zu benutzen.

Aufgabe 1: Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme!

Einfache Aufgaben:

1. $y = -1 \wedge 7x - y = 134$
2. $9x - 3y = -3 \wedge -x + y = 15$
3. $-8x + y = -97 \wedge -5x - y = -33$
4. $13x + y + 106 = 0 \wedge -2x + \frac{1}{3}y = 9$
5. $4x - \frac{1}{5}y = 105 \wedge x + y = 21$
6. $75x - y = 1100 \wedge -y + 25(x - 14) = 0$
7. $-21x + \frac{1}{2}y = 58 \wedge 2(x + y) = -26$
8. $10x + 2y = -44 \wedge -9x - \frac{1}{2}y = 37$

Normale Aufgaben:

1. $x - \frac{1}{4}y = 10 \wedge -2^5x + y = -516$
2. $-4x + 8y = 112 \wedge 3x - 6y = -84$
3. $-70x + 7y = -21 \wedge -90x + 9y = -81$
4. $x - \frac{1}{5}y = 8 \wedge 7(x - 8) = -y$
5. $-4x + y = -62 \wedge x - \frac{1}{52}y = \frac{1181}{52}$
6. $15x + 5y = -35 \wedge -9x - 3y = 21$
7. $-17x + y + 2 = 0 \wedge 17\pi x - \pi = \pi y$
8. $-10x + y = 0 \wedge 12x + y = 0$

Aufgabe 2: Skizzieren Sie die folgenden Gleichungssysteme als Geraden in Koordinatensystemen. Tipp: Formen Sie zuerst nach y um. Was ist die Verbindung zwischen Ihren Skizzen und der Lösung der Gleichungssysteme?

1. $9x - 3y = -3 \wedge -x + y = 15$
2. $-10x + y = 0 \wedge 12x + y = 0$

3. $-4x + 8y = 112 \wedge 3x - 6y = -84$

4. $-70x + 7y = -21 \wedge -90x + 9y = -81$

Aufgabe 3: In der Ökonometrie versuchen wir, Modelle zu erstellen, die wirtschaftliche Zusammenhänge zu beschreiben. Dazu erheben wir z.B. Daten über Gehälter und verschiedene Einflussfaktoren auf das Gehalt wie Bildungsabschluss, Geschlecht, Berufserfahrung, Vollzeit oder Teilzeit, Ort der Arbeit etc.

Man könnte so ein Modell in ein lineares Gleichungssystem wie das Folgende schreiben:

$$\text{Gehalt}_1 = \alpha \cdot \text{Bildungsabschluss}_1 + \beta \cdot \text{Geschlecht}_1 + \gamma \cdot \text{Berufserfahrung}_1 + \delta \cdot \text{Teilzeit}_1 + \epsilon \cdot \text{Ort}_1$$

$$\text{Gehalt}_2 = \alpha \cdot \text{Bildungsabschluss}_2 + \beta \cdot \text{Geschlecht}_2 + \gamma \cdot \text{Berufserfahrung}_2 + \delta \cdot \text{Teilzeit}_2 + \epsilon \cdot \text{Ort}_2$$

...

Die Indizes stehen dabei für Nummer der Beobachtung, d.h. das Gehalt, Bildungsabschluss etc. der ersten Person, deren Daten wir in unserem Datensatz haben.

Wie schätzen Sie die Erfolgsaussichten ein, dieses LGS zu lösen, wenn wir echte Daten dafür benutzen würden?

7 Lineare Algebra

Gegeben seien:

$$\alpha = 2$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie $e_1 \cdot w$.
2. Berechnen Sie $\vec{0} \cdot x$.
3. Was ist a_{31} [a_{12}] in der Matrix m ?
4. Berechnen Sie z^T .
5. Transponieren Sie m .
6. Berechnen Sie αw .
7. Berechnen Sie αx .
8. Berechnen Sie $\alpha(w + x)$.
9. Berechnen Sie $\beta y + z$.
10. Was ist das Skalarprodukt von w und x ?
11. Wie lang ist der Vektor z (d.h. die Norm des Vektors)?
12. Berechnen Sie yz^T .
13. Berechnen Sie $x^T x$.
14. Berechnen Sie $y^T m y$.