Universität Mannheim

Fakultät für Rechtswissenschaft und Volkswirtschaftslehre
Abteilung Volkswirtschaftslehre

Wiederholungskurs Schulmathematik

Kursbegleitendes Skript und Übungsaufgaben

Juni 2025

Vorwort

In den vergangenen Jahren wurde immer wieder festgestellt, daß insbesondere diejenigen Studienanfänger, deren Schulzeit bereits einige Zeit zurückliegt oder die in der gymnasialen Oberstufe keinen entsprechenden Schwerpunkt gesetzt haben, ihr Studium mit zum Teil nicht unerheblichen Defiziten im Bereich der Mathematik beginnen. Um die daraus erwachsende zusätzliche Erschwernis etwas zu mindern, bietet die Fakultät für Volkswirtschaftslehre zu Beginn eines jeden Semesters einen Wiederholungskurs Schulmathematik in Form einer 14-tägigen Blockveranstaltung an.

Das Ihnen vorliegende Skriptum kann und will den Besuch dieses Kurses keinesfalls ersetzen, da in dessen Rahmen der Stoff zum Teil in anderer Gewichtung und um zahlreiche Beispiele bereichert dargeboten wird. Es soll lediglich allen Kursteilnehmern als Unterlage dienen, in der die wichtigsten Kursinhalte in geordneter Form zusammengestellt sind. Desweiteren kann es all jenen Studierenden, die am Kurs selbst nicht teilgenommen haben, eine Orientierungshilfe geben, welche Inhalte während des Kurses behandelt wurden, um jene, gegebenenfalls mit der Unterstützung weiterer Literatur, nötigenfalls selbständig zu wiederholen.[1]

Selbstverständlich bieten sich zahlreiche Möglichkeiten zur Verbesserung dieses Skriptums. Für Anregungen und Kritik diesbezüglich bin ich Ihnen daher jederzeit dankbar.

J.G.

In diesem Jahr (2019) wurde der Inhalt des Skriptes überarbeitet. Es wurde hauptsächlich gekürzt um den Fokus auf die Teile der Schulmathematik zu legen, bei denen, aus meiner Sicht, die größten Defizite bestehen.

S.H

[1] Es sei in diesem Zusammenhang insbesondere auf die Literaturangaben [4] und [5] verwiesen.

Inhaltsverzeichnis

1. Arithmetik

In diesem Kapitel werden grundlegende Elemente aus dem Bereich der Arithmetik wiederholt, namentlich die vier Grundrechenarten und die Potenzrechnung nebst ihren Umkehrungen, dem Wurzelziehen und dem Logarithmieren.

1.1. Die vier Grundrechenarten

Als die vier Grundrechenarten bezeichnet man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Sie sind nachfolgend zusammen mit den für jede der Grundrechenarten spezifischen Bezeichnungen der beiden Operanden und des Ergebnisses angegeben:

Für die **Addition** $a + b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Summand} & \text{plus} & \text{Summand} & \text{gleich} & \text{Summe} \\ a & + & b & = & c \end{array}$$

Für die **Subtraktion** $a - b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Minuend} & \text{minus} & \text{Subtrahend} & \text{gleich} & \text{Differenz} \\ a & - & b & = & c \end{array}$$

Für die **Multiplikation** $a \cdot b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Faktor} & \text{mal} & \text{Faktor} & \text{gleich} & \text{Produkt} \\ a & \cdot & b & = & c \end{array}$$

Dabei sind als Multiplikationszeichen alternativ statt '$\cdot$' auch '$\times$' oder '$\star$' gebräuchlich. Zudem wird üblicherweise auf die Verwendung eines Malzeichens verzichtet, ist mindestens einer der beiden Faktoren keine konstante Zahl, sondern etwa eine Variable. Man schreibt also ab für $a \cdot b$.

Für die **Division** $a : b = c$ gelten die folgenden Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Dividend} & \text{durch} & \text{Divisor} & \text{gleich} & \text{Quotient} \\ a & : & b & = & c \end{array}$$

Alternativ findet als Divisionszeichen statt ':' auch '/' Verwendung. Desweiteren werden Quotienten oftmals als **Brüche** geschrieben, also in der Form $\frac{a}{b}$ statt $a : b$. Wird ein Bruch betrachtet, so heißt der Dividend auch Zähler und der Divisor Nenner. Divisor bzw. Nenner müssen dabei ungleich Null sein. Anderenfalls ist das Ergebnis der Divison nicht definiert.

Für die Addition und die Multiplikation gilt das sogenannte **Kommutativgesetz**, welches besagt, daß

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

gilt. In diesem Zusammenhang beachte man, daß jede Subtraktion $a - b$ als eine Addition mit dem negativen Subtrahenden aufgefaßt werden kann, es ist also $a - b = a + (-b)$. Aus diesem Grund werden auch Differenzen im oben genannten Sinne üblicherweise und auch im folgenden als Summen bezeichnet. Desweiteren kann jede Divison $a : b$ als Multiplikation mit dem **Kehrwert**[1] $\frac{1}{b}$ des Divisors aufgefaßt werden, es gilt also $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$.

1.2. Zahlenbegriffe

Eng mit den vier Grundrechenarten verknüpft sind die nachfolgend zusammengestellten vier grundlegenden Zahlenbegriffe.

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$, die sich intuitiv bei Abzählvorgängen ergeben, werden **natürliche Zahlen** genannt. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet. Sie ist bezüglich der Addition und der Multiplikation **abgeschlossen**. Das heißt, daß die Addition und die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen in jedem Fall wiederum eine natürliche Zahl ergibt.

Erweitert man die Menge aller natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen $-1, -2, -3, \ldots$ und die 0, so erhält man die Menge der **ganzen Zahlen**. Diese Menge wird mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet und ist zusätzlich bezüglich der Subtraktion abgeschlossen.

Zahlen, die sich als Quotient $\frac{a}{b}$ zweier beliebiger ganzer Zahlen a und b mit $b \neq 0$ darstellen lassen, heißen **rationale Zahlen**. Die Gesamtheit dieser Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{Q}$ bezeichnet und ist bezüglich aller vier Grundrechenarten abgeschlossen.

Als letzter Zahlenbegriff sollen an dieser Stelle noch die **reellen Zahlen** genannt werden. Sie umfassen neben allen rationalen Zahlen auch die sogenannten irrationalen Zahlen, welche sich nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen darstellen lassen.[2] Die Menge aller reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet und ist ebenfalls bezüglich aller vier Grundrechenarten abgeschlossen.

Offensichtlich gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; den reellen Zahlen liegt also der allgemeinste der vier hier aufgeführten Zahlenbegriffe zugrunde.

In der Mathematik häufig auftretende Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die sogenannten **Intervalle**, welche in vier verschiedenen Formen auftreten: Für zwei beliebige reelle Zahlen a und b mit $a \leq b$ stellt

$$[a, b]$$

ein sogenanntes **geschlossenes** Intervall dar. Es beinhaltet alle reellen Zahlen x, welche die Bedingung $x \geq a \wedge x \leq b$ erfüllen.

$$(a, b)$$

ist hingegen ein sogenanntes **offenes** Intervall, welches alle reellen Zahlen x mit $x > a \wedge x < b$ enthält. Mischformen dieser beiden Arten von Intervallen sind das **linksoffene** Intervall $(a, b]$ und das **rechtsoffene** Intervall $[a, b)$, welche alle x mit $x > a \wedge x \leq b$ bzw. $x \geq a \wedge x < b$ enthalten.

Ist die untere Intervallgrenze $-\infty$ (sprich: minus Unendlich) oder aber die obere ∞ (sprich: Unendlich), so schreibt man mit $a \in \mathbb{R}$ als anderer Intervallgrenze $(-\infty, a]$ bzw. $[a, \infty)$ für das entsprechende abgeschlossene und $(-\infty, a)$ bzw. (a, ∞) für das entsprechende offene Intervall.

[1] Der Kehrwert jeder reellen Zahl ungleich Null ergibt sich, indem man 1 durch diese Zahl teilt. Für die Zahl Null existiert kein Kehrwert.

[2] Beispiele irrationaler Zahlen sind die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π.

Man beachte, daß für Intervalle viele abweichende Schreibweisen gebräuchlich sind, so beispielsweise für geschlossene Intervalle (a, b) und für offene Intervalle $)a, b($. Man sollte sich daher bei der Lektüre eines mathematischen Textes immer versichern, welche Schreibweise in ihm Verwendung findet.

Last but not least ist darauf hinzuweisen, dass ∞ und $-\infty$ KEINE reelen Zahlen sind, sondern die reelen Zahlen äbrundenöder erweitern.

1.3. Bruchrechnung

Bevor in diesem Abschnitt das Rechnen mit Brüchen bzw. mit rationalen Zahlen wiederholt werden kann, müssen zunächst einige Grundbegriffe der Zahlentheorie betrachtet werden, welche sich ausschließlich auf die natürlichen Zahlen beziehen.

Ist eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ ohne Rest durch eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ teilbar, ist also $a/b \in \mathbb{N}$, dann heißt a **Vielfaches** von b und b **Teiler** von a.

Beispiel 1.1: Die Zahlen 3 und 5 sind im Gegensatz zu 7 Teiler von 30. Die Zahl 12 ist ein Vielfaches von 4.

Die größten Zahl, die Teiler zweier gegebener Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ ist, heißt **größter gemeinsamer Teiler** dieser beiden Zahlen und wird mit dem Symbol $\text{ggt}(a, b)$ bezeichnet. Die kleinste Zahl, die ein Vielfaches der beiden Zahlen ist, heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** und wird mit dem Symbol $\text{kgv}(a, b)$ bezeichnet.

Beispiel 1.2:
a) Es ist $\text{ggt}(21, 35) = 7$.
b) Es ist $\text{kgv}(21, 35) = 105$.

Für die systematische Bestimmung größter gemeinsamer Teiler oder kleinster gemeinsamer Vielfacher ist das Instrument der **Primfaktorenzerlegung** sehr hilfreich. Es wird nachfolgend vorgestellt:

Eine Zahl aus der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen heißt **Primzahl**, wenn sie nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist. Die zehn kleinsten Primzahlen sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ und 29, keine Primzahlen sind beispielsweise die 33 oder die 72, da beide Zahlen unter anderem ohne Rest durch 3 teilbar sind. Die Primfaktorenzerlegung besagt, dass es ist möglich ist jede natürliche Zahl eindeutig[3] als ein Produkt aus Primzahlen darzustellen. Diese Primzahlen heißen **Primfaktoren**

Beispiel 1.3:
a) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
b) $1540 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Um eine natürliche Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, empfiehlt es sich, in aufsteigender Reihenfolge der Primzahlen beginnend mit 2 zu überprüfen, ob und wie oft die zu zerlegenden

[3] Bis auf die Reihenfolge von sich wiederholenden Primzahlen. Z.B. hat 20 die Primzahlenzerlegung $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Die Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der "2er" eindeutig.

Zahl durch die gerade betrachtete Primzahl ohne Rest teilbar ist. Ist die zu zerlegende Zahl ohne Rest teilbar, so wird sie entsprechend oft durch die gerade betrachtete Primzahl geteilt, jene mit der entsprechenden Häufigkeit als Primfaktor vermerkt, und das Divisonsergebnis in gleicher Weise weiter zerlegt, bis dieses nicht mehr möglich ist, da es selbst eine Primzahl und damit der letzte der gesuchten Primfaktoren ist.

Beispiel 1.4:
a) Nachfolgend ist die Primfaktorenzerlegung der Zahl 1540 dargestellt:

$$\begin{aligned} 1540 &= 2 \cdot 770 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 385 \\ & \text{(385 nicht ohne Rest durch 3 teilbar)} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 77 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \\ & \text{(11 ist selbst eine Primzahl)} \end{aligned}$$

b) Nachfolgend ist die Primfaktorenzerlegung der Zahl 2100 dargestellt:

$$\begin{aligned} 2100 &= 2 \cdot 1050 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 525 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 175 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\ & \text{(7 ist selbst eine Primzahl)} \end{aligned}$$

Es gilt nun, daß der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ das Produkt aller Zahlen ist, die zugleich Primfaktor von a und b sind. Mehrfach auftretende Primfaktoren werden dabei so oft berücksichtigt, wie sie sowohl bei der Zerlegung von a als auch der von b mehrfach auftreten.

Beispiel 1.5: Dem nachfolgenden Schema ist zu entnehmen, wie mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung der größte gemeinsame Teiler von 1540 und 2100 bestimmt werden kann:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1540 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & & & 7 & \cdot & 11 & & \\ 2100 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & & & & \\ \hline \text{ggt} & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & & & 7 & & & = & 140 \end{array}$$

Also ist $\text{ggt}(1540, 2100) = 140$.

Beispiel 1.6:

1. $ggt(8, 12) = 4$
2. $ggt(752, 888) = 8$

Desweiteren gilt, daß das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ das Produkt aller Zahlen ist, die Primfaktor von a oder von b sind. Mehrfach auftretende Primfaktoren werden dabei so oft berücksichtigt, wie sie bei der Zerlegung von a und b am häufigsten auftreten.

Beispiel 1.7: Dem nachfolgenden Schema ist zu entnehmen, wie mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung das kleinste gemeinsame Vielfache von 1540 und 2100 bestimmt werden kann:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1540 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & & & 5 & \cdot & & & 7 & \cdot & 11 & & \\ 2100 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & & & & \\ \hline \text{kgv} & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 7 & \cdot & 11 & = & 23100 \end{array}$$

Also ist $\text{kgv}(1540, 2100) = 23100$.

Beispiel 1.8:

1. $kgv(8, 12) = 24$
2. $kgv(33, 456) = 5016$

Ein **Bruch** ist die Darstellung einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ als Quotient zweier ganzer Zahlen, also in der Form $q = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$, wobei z auch **Zähler** und n **Nenner** des Bruchs heißt. Es gilt, daß die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch nie eindeutig ist, da beispielsweise durch die Multiplikation des Zählers und des Nenners eines Bruchs $\frac{z}{n}$ mit einer beliebigen Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $\frac{mz}{mn}$ eine weitere Darstellung derselben rationalen Zahl als Bruch gewonnen werden kann. Die Multiplikation des Zählers und des Nenners eines Bruchs mit derselben ganzen Zahl m bezeichnet man auch als **Erweitern** des Bruchs um m. Dividiert man hingegen Zähler z und Nenner n eines Bruchs durch dieselbe ganzen Zahl m, wobei m Teiler von z und n sein muß, so wird diese Operation, die den Wert des Bruchs gleichfalls nicht verändert, als **Kürzen** durch m bezeichnet. Dabei ist aus Gründen der Übersichtlichkeit das Kürzen eines Bruchs durch den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner besonders sinnvoll.

Beispiel 1.9:
a) Das Erweitern von $\frac{6}{5}$ mit 3 ergibt $\frac{18}{15}$.
b) Das Kürzen von $\frac{12}{16}$ um 4 ergibt $\frac{3}{4}$.

Zwei Brüche werden miteinander **multipliziert**, indem man das Produkt ihrer Zähler durch das Produkt ihrer Nenner teilt. Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert. Als **Kehrwert** eines Bruchs $\frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{Z}$ wird dabei der Bruch $\frac{n}{z}$ bezeichnet.

Beispiel 1.10:
a) Es ist $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$ und $\frac{9}{7} \cdot \frac{2}{8} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$.
b) Es ist $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{28}$.

Zwei Brüche mit übereinstimmenden Nennern werden **addiert**, indem man ihre Zähler addiert und durch den gemeinsamen Nennder dividiert. Es gilt also

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 1.11:

1. $\frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4}$
2. $\frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$

Zwei Brüche mit verschiedenen Nennern müssen hingegen erst in der Art erweitert werden, daß ihre beiden Nenner übereinstimmen, bevor sie dann wie eben beschrieben addiert werden können. Es bietet sich dabei an, die beiden Nenner jeweils so zu erweitern, daß als neuer gemeinsamer Nenner deren kleinstes gemeinsames Vielfaches fungiert.

Beispiel 1.12:

1. $\frac{3}{7} + \frac{3}{2} = \frac{6}{14} + \frac{21}{14} = \frac{27}{14}$
2. $\frac{at}{x} + \frac{1}{bx} = \frac{abt}{bx} + \frac{1}{bx} = \frac{abt+1}{bx}$
3. $\frac{4}{3x} + \frac{y}{(4-3x)} = \frac{4(4-3x)}{3x(4-3x)} + \frac{3xy}{3x(4-3x)} = \frac{4(4-3x)+3xy}{3x(4-3x)}$

1.4. Klammerrechnung und die binomischen Formeln

Allgemein ergibt sich der Wert algebraischer Ausdrücke, in denen mehrere Zahlen durch unterschiedliche Grundrechenarten verknüpft werden, gemäß der Regel **'Punkt- vor Strichrechnung'**, die besagt, es seien zuerst die Multiplikationen und Divisionen und danach die Additionen und Subtraktionen auszuführen. Sollen zusammengesetze algebraische Ausdrücke von dieser Regel abweichend ausgewertet werden, so kann dieses durch die Verwendung von Klammern erreicht werden.

Beispiel 1.13:
a) $3 + 5 \cdot 8 = 43$ und $(3 + 5) \cdot 8 = 64$;
b) $20 : 2 + 2 = 12$ und $20 : (2 + 2) = 5$

Für das Rechnen mit Klammern sind die folgenden Termumformungsregeln sehr nützlich, welche sich unmittelbar aus dem sogenannten **Distributivgesetz**

$$a(b + c) = ab + ac$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ergeben:

In einer Summe kann eine Klammer, vor der ein '+' steht, weggelassen werden. Wird hingegen eine Klammer weggelassen, vor der ein '$-$' steht, so müssen die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer umgekehrt werden. Es gilt also $a+(b+c)=a+b+c$ und $a-(b-c)=a-b+c$. Die Termumformung des Weglassens von Klammern wird auch als das **Auflösen** von Klammern bezeichnet.

Beispiel 1.14:

1. $3x+(4x-5)=7x-5$
2. $3x-(4x-5)=5-x$
3. $2a+(3b+5a)=2a+3b+5a=7a+3b$
4. $5a-(-3b-(5a-2b))-b=10a$

Desweiteren gilt, daß ein Produkt, dessen einer Faktor eine in Klammern stehende Summe ist, gleich der Summe der Produkte aus dem anderen Faktor und jeweils einem Summanden der in Klammern stehenden Summe ist.[4]

$$a(b\pm c)=ab\pm ac$$

Man bezeichnet diese Termumformung auch als **Ausmultiplizieren**. Die mehrfache Anwendung dieses Gesetzes erbringt, wie ein Produkt aus zwei beklammerten Summen ausmultipliziert werden kann: $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$.

Beispiel 1.15:

1. $5(6x-5)=30x-25$
2. $(4-2x)(3x+5)=4(3x+5)-2x(3x+5)=12x+20-6x^2-10x=-6x^2+2x+20$

Als **Ausklammern** bezeichnet man schließlich die Umkehrung des Ausmultiplizierens. Ein in allen Summanden einer Summe enthaltener Faktor wird dabei aus der Summe herausgezogen.

Beispiel 1.16:

1. $15x-5=5(x-1)$
2. $4x^2+2x-5=2x(2x+1)-5$

Zusammenfassend zum Üben:

Beispiel 1.17:

a) $2a+(3b+5a)=2a+3b+5a=7a+3b$ und $5a-(-3b-(5a-2b))-b=10a$
b) $7a(3b+4)=21ab+28a$ und $(a+2)(b+3c-2d)=(a+2)b+3(a+2)c-2(a+2)d=ab+2b+3ac+6c-2ad-4d$
c) $12ac+18bc=6c(2a+3b)$ und $2ab+5a+2b+5=(2ab+5a)+(2b+5)=(a+1)(2b+5)$

Soll eine in Klammern stehende Summe durch eine Zahl dividiert werden, so kann man sich zunutze machen, daß eine Division einer Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors entspricht. So gilt beispielsweise $(4ab+8bc):2b=(4ab+8bc)\cdot\frac{1}{2b}=2a+4c$.

Beispiel 1.18:

[4] Nichts anderes besagt schließlich das Distributivgesetz.

1. $(9x - 15) : 3 = (9x - 15)\frac{1}{3} = \frac{(9x-15)}{3} = 9x\frac{1}{3} - 15\frac{1}{3} = 3x - 5$
2. $(26x^2 + 4x) : 2x = 13x + 2$

Spezialfälle des Multiplizierens zweier beklammerter Summen stellen die **Binomischen Formeln** dar. Sie gelten, wenn die beiden beklammerten Summen die Bauart $a+b$ oder $a-b$ haben, und damit sogenannte **Binome** sind. Wie man leicht nachprüfen kann, gilt:[5]

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Beispiel 1.19:
a) $(3a + 5b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 5b + (5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$
b) $(7x - 2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$
c) $(9u + 3v)(9u - 3v) = 81u^2 - 9v^2$

Faktorisieren

1.5. Potenzen und Wurzeln

Das n-fache Produkt

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit sich selbst wird als die n-te **Potenz** dieser Zahl bezeichnet. Dabei heißt a auch **Basis** und n **Exponent** der Potenz. Man schreibt dafür a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

Der Potenzbegriff wird über die Definition $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf ganzzahlige Exponenten kleiner Null erweitert und mit der Festsetzung $a^0 := 1$ für $a \neq 0$ schließlich auf alle ganzzahligen Exponenten ausgedehnt.[6]

Für das Rechnen mit Potenzen gelten einige Regeln, die nachfolgend für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ zusammengestellt sind:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0$
3. $a^n b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; b \neq 0$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$

[5] Zur Erinnerung: Für eine Multiplikation zweier gleicher Faktoren x schreibt man statt $x \cdot x$ üblicherweise x^2 (sprich: x Quadrat oder x hoch Zwei).
[6] Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert.

Beispiel 1.20:[$a^n a^m = a^{n+m}$]

1. $3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
2. $4^4 4^5 = 4^9$
3. $x^3 x^{-3} = 1$
4. $y^5 y^{-6} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

Beispiel 1.21:[$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0$]

1. $\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2} = 3$
2. $\frac{3^2}{3^{-3}} = 3^{2+3} = 3^5$
3. $\frac{x^m}{x^{-m}} = x^{2m}$

Beispiel 1.22:[$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; b \neq 0$]

1. $\frac{5^2}{5^4} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$

Beispiel 1.23:[$a^n b^n = (ab)^n$]

1. $4^2 \cdot 6^2 = (4 \cdot 6)^2 = 24^2 = 576$

Beispiel 1.24:[$(a^n)^m = a^{nm}$]

1. $\left(2^2\right)^3 = 2^6 = 64$

Für die Potenz $a^n = b$ mit $b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt a auch n-te **Wurzel** aus b und man schreibt $a = \sqrt[n]{b}$ für $n \neq 2$ und einfach nur $a = \sqrt{b}$ für $n = 2$.[7] Das sogenannte Ziehen einer Wurzel ist somit eine Operation, die das Bilden einer Potenz umkehrt.

Wurzelausdrücke werden auch als Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten interpretiert, indem

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}.$$

festgesetzt wird. Die nachfolgende Rechnung, welche die oben angegebenen Potenzrechenregeln rein formalistisch auf nicht ganzzahlige Exponenten überträgt, macht die Sinnhaftigkeit einer solchen Festsetzung deutlich:

$$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a$$

Allgemein gelten die oben angegebenen Pozenzrechenregeln alle analog, sodaß für das Rechnen mit Wurzeln mit $a, b \geq 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ folgt:

1.

[7] Dabei wird b auch als Radikant bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\
\sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[nm]{a}
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.25:
a) Es ist $\sqrt{16} = 16^{1/2} = 4$.
b) Es ist $\sqrt[4]{x^{12}y^8} = \left(x^{12}y^8\right)^{1/4} = \left(x^{12}\right)^{1/4}\left(y^8\right)^{1/4} = x^{12/4}y^{8/4} = x^3y^2$.
c) Es ist $\sqrt[m]{x\sqrt[n]{y}} = \left(xy^{1/n}\right)^{1/m} = x^{1/m}y^{1/mn}$.

1.6. Logarithmen

Mit dem Wurzelziehen wurde im vorangegangenen Abschnitt eine Operation behandelt, welche das Bilden einer Potenz umkehrt. Eine weitere Umkehrung des Potenzierens ist das sogenannte Logarithmieren.

Für die Potenz $a^y = x$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt y auch **Logarithmus** von x zur **Basis** a. Man schreibt dafür $y = \log_a x$. Der Logarithmus einer Zahl x zur Basis a ist also diejenige Zahl y, mit der a potenziert werden muß, um x zu erhalten.

Besondere Basen sind in diesem Zusammenhang 10 und die Eulersche Zahl $e \approx 2,718281828$, die insbesondere für Wachstumsprozesse von Bedeutung ist. Ein Logarithmus zur Basis 10 wird üblicherweise einfach nur mit $\log x$, ein Logarithmus zur Basis e mit $\ln x$ (für 'logarithmus naturalis') bezeichnet.

Beispiel 1.26:
a) Es ist $\log 100 = 2$.
b) Es ist $\log_2 64 = 6$.
c) Es ist $\ln 1 = 0$.

Auch für das Rechnen mit Logarithmen gelten einige Regeln, die alle nachfolgend für $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ und $x, y > 0$ zusammengestellt sind:

$$
\begin{aligned}
\log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \\
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a(x/y) &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a(x^y) &= y \log_a x
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.27:
a) Es ist $\log\left(100 \cdot 1000^2\right) = \log 100 + \log\left(1000^2\right) = \log 100 + 2\log 1000 = 2 + 2 \cdot 3 = 8$.
b) Es ist $\frac{2}{7}\log x + \frac{3}{7}\log y - \frac{5}{7}\log z = \frac{1}{7}\left(\log\left(x^2\right) + \log\left(y^3\right) - \log\left(z^5\right)\right) = \frac{1}{7}\log\left(\frac{x^2y^3}{z^5}\right)$.

Man beachte, daß der Logarithmus nur für Zahlen größer als Null gebildet werden kann; für alle Zahlen kleiner oder gleich Null ist er nicht definiert.

1.7. Das Summenzeichen

Möchte man eine Summe oder ein Produkt über n verschiedene, nur durch einen Index unterschiedene Summanden s_i bzw. Faktoren f_i bilden, so schreibt man dafür oft verkürzend

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{i=1}^{n} f_i.$$

Der Index i, der die einzelnen Summanden bzw. Faktoren unterscheidet, wird auch Laufvariable genannt.

Beispiel 1.28:
a) Es ist $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
b) Sei $f_1 := 2$, $f_2 := 4$ und $f_3 := 1$. Dann ist $\prod_{i=1}^{3} f_i = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$.

2. Grundzüge der Mengenlehre

In diesem Kapitel soll eine kurze Wiederholung ausgewählter Elemente der Mengenlehre gegeben werden. Jene ist ein grundlegender Bestandteil der Mathematik, da sie Konzepte bereitstellt, die den geordneten Umgang mit gleichartigen Objekten mathematischer Betrachtungen ermöglichen. aa

2.1. Grundbegriffe

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte, wobei von jedem Objekt eindeutig feststehen muß, ob es zur Menge gehört oder nicht. Gehört ein Objekt zu einer Menge, so bezeichnet man es auch als **Element** dieser Menge. Ist ein Objekt e Element einer Menge M, so schreibt man dafür $e \in M$ (sprich: e Element M); ist e hingegen nicht Element von M, so schreibt man dafür $e \notin M$ (sprich: e nicht Element M).

Üblicherweise wird eine Menge auf eine von zwei Arten beschrieben:

Die erste besteht darin, alle ihre Elemente in geschweifte Klammern eingefaßt und durch Kommata getrennt vollständig aufzuzählen. Beispielsweise beschreibt der Ausdruck $\{a, e, i, o, u\}$ die Menge aller Vokale des lateinischen Alphabets. In unzweideutigen Fällen ist, will man sich Schreibarbeit sparen oder ist die vollständige Aufzählung aller Elemente unmöglich, die Verwendung von Ellipsen $(\ldots)$ erlaubt. So wird jeder $\{a, b, c, d, e, \ldots, z\}$ unzweideutig als die Menge aller kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets und $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ als die Menge aller positiven und geraden Zahlen erkennen.

Die zweite gebräuchliche Art der Beschreibung ist die, eine allen Elementen einer Menge und nur diesen anhaftende und somit für Elemente dieser Menge charakteristische Eigenschaft anzugeben. So kann man beispielsweise die Menge aller Vokale des lateinischen Alphabets auch als $\{x \mid x \text{ ist Vokal des lateinischen Alphabets }\}$ schreiben.

Eine spezielle Menge ist die sogenannte **leere Menge**. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß sie kein Element enthält und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Ein weiterer wichtiger Begriff der Mengenlehre ist der der **Mächtigkeit**. Jene entspricht für Mengen mit endlich vielen Elementen jeweils der Anzahl von Elementen der Menge. Die Mächtigkeit von Mengen mit unendlich vielen Elementen wird mit dem Symbol ∞ (sprich: unendlich) bezeichnet.[1] Üblicherweise wird die Mächtigkeit einer Menge M als $|M|$ geschrieben.

Beispiel 2.1:
a) Sei $M := \{2, 3, 4\}$. Dann ist $|M| = 3$.
b) Sei $N := \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$. Dann ist $|N| = 3$.
c) Es ist $|\{1, 2, 3, \ldots\}| = \infty$.

[1] Bei den unendlichen Mengen wird desweiteren zwischen abzählbar und überabzählbar unendlichen Mengen unterschieden. Im Rahmen dieses Wiederholungskurses wird diese Unterscheidung allerdings nicht behandelt.

Ähnlich wie die reellen Zahlen in verschiedenen, durch Relationen ($=, \neq, >, \geq,$
$<, \leq$) formalisierten Beziehungen zueinander stehen, ist dieses auch für Mengen der Fall. Gilt für zwei Mengen A und B, daß jedes Element von A auch Element von B ist, so heißt A auch **Teilmenge** von B. Man schreibt $A \subseteq B$. Existiert darüberhinaus ein Element von B, welches nicht Element von A ist, so heißt A **echte Teilmenge** von B, und man schreibt $A \subset B$. Gilt für zwei Mengen A und B sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$, haben also beide Mengen die gleichen Elemente, so heißen diese Mengen gleich, und man schreibt $A = B$.[2] Der Umstand, daß zwei Mengen A und B ungleich sind oder aber A nicht Teilmenge bzw. nicht echte Teilmenge von B ist, wird durch die Ausdrücke $A \neq B$, $A \nsubseteq B$ bzw. $A \not\subset B$ beschrieben.

Beispiel 2.2: Sei $M := \{2, 3, 4\}$, $N := \{2, 4\}$, $P := \{4, 3, 2\}$ und $Q := \{\{2\}\}$. Dann gilt:
a) $N \subseteq M \subseteq P$
b) $N \subset M$ und $M \not\subset P$
c) $M = P$
d) $Q \not\subset M$

In einigen Beispielen wurde bereits deutlich, daß Mengen durchaus wiederum Mengen als Elemente enthalten können. Gelegentlich ist nun die Menge aller möglichen Teilmengen einer Menge M von Interesse. Diese Menge heißt **Potenzmenge** von M und wird formal üblicherweise durch das Symbol $\wp(M)$ bezeichnet.

Beispiel 2.3:
a) Gegeben sei die Menge $M := \{1, 2, 3\}$. Als Potenzmenge dieser Menge ergibt sich $\wp(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
b) Gegeben sei die Menge aller Vokale $V := \{a, e, i, o, u\}$. Es gilt $\wp(V) = \{W \,|\, W$ ist eine Menge, deren Elemente allesamt Vokale sind$\}$.
c) Die Potenzmenge der leeren Menge ist $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

2.2. Mengenoperationen

Für Mengen sind verschiedene Operationen definiert, die jeweils zwei Mengen zu einer Ergebnismenge verknüpfen. So ist der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B als die Menge aller Objekte definiert, die sowohl Element von A als auch Element von B sind; man schreibt für diese Menge üblicherweise $A \cap B$. Als **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist hingegen die Menge aller Objekte definiert, die entweder Element von A oder Element von B oder Element von A und B sind; man schreibt dafür üblicherweise $A \cup B$.

Beispiel 2.4: Sei $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{3, 4\}$. Dann gilt:
a) $M \cap N = \{3\}$
b) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$

Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer, ist also $A \cap B = \emptyset$, so heißen diese beiden Mengen **disjunkt**.

[2] Man beachte, daß auch die beiden Mengen $\{a, b\}$ und $\{a, b, b\}$ aufgrund der Forderung, daß alle Elemente wohlunterschieden sein müssen, gleich sind.

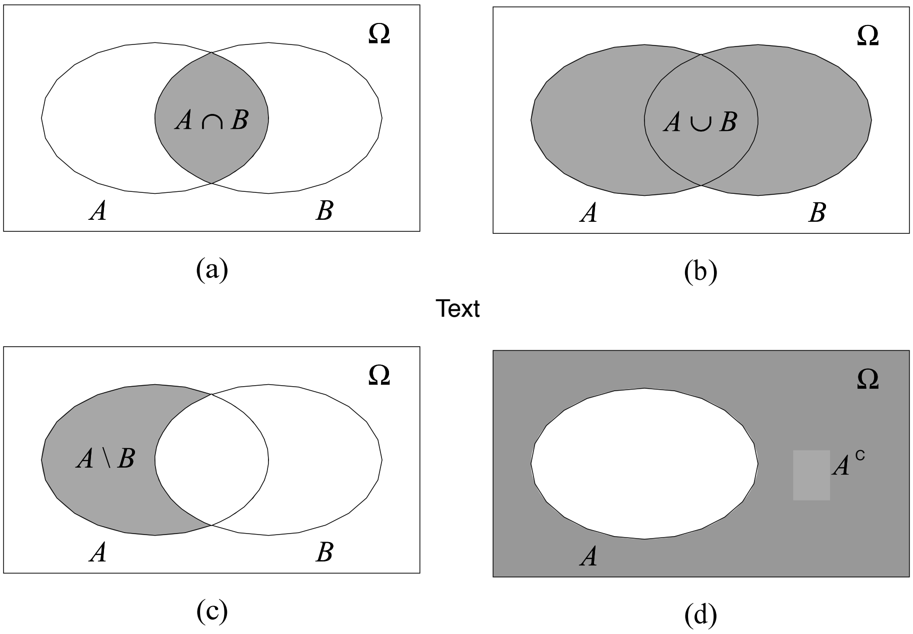


Abbildung 2.1.: Venn-Diagramme

Schließlich existiert als Mengenoperation zur Verknüpfung zweier Mengen noch die der **Differenz**. Sie ist für zwei beliebige Mengen A und B als die Menge aller Elemente definiert, die zwar Element von A, nicht aber Element von B sind; man schreibt dafür $A \setminus B$. Man beachte, daß die Bildung der Differenz zweier Mengen im Unterschied zur Bildung des Durchschnitts oder der Vereinigung nicht kommutativ ist, d.h. es gilt in der Regel nicht $A \setminus B = B \setminus A$, wohingegen immer sowohl $A \cup B = B \cup A$ als auch $A \cap B = B \cap A$ gültig ist.

Abschließend wird der Begriff des **Komplements** definiert. Das Komplement einer Menge A enthält alle Elemente, die nicht in A enthalten sind. Somit ist das Komplement auch eine Menge und wird als A^C geschrieben.

Beispiel 2.5: Sei $\Omega := \{\text{Kreuz, Pik, Herz, Karo}\}$ und $A := \{\text{Kreuz, Pik}\}$. Dann ist $\mathcal{C}_\Omega A = \mathcal{C}A = \{\text{Herz, Karo}\}$.

Mengenoperationen und Beziehungen zwischen Mengen werden oftmals in sogenannten **Venn-Diagrammen** graphisch veranschaulicht. In deartigen Diagrammen werden Mengen als geeignete Flächen in der Ebene dargestellt. In Abbildung 2.1 sind beispielhaft die Bildung von Durchschnitt (a), Vereinigung (b), Differenz (c) und Komplement für zwei nicht disjunkte Mengen A und B und eine Grundmenge Ω in Venn-Diagrammen wiedergegeben.

2.3. Rechengesetze für Mengenoperationen

Für die im vorangehenden Abschnitt vorgestellten Mengenoperationen gelten verschiedene Gesetze. Diese sind nachfolgend für beliebige Mengen A, B, C und Ω mit $A, B, C \subseteq \Omega$ zusammengestellt:

Zunächst gelten sowohl für die Vereinigung als auch die Durchschnittsbildung sowohl daß **Kommutativ-** als auch das **Assoziativgesetz**, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} A \cup B = B \cup A \quad &\text{und} \quad A \cap B = B \cap A, \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad &\text{und} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Desweiteren gelten die beiden **Distributivgesetze**

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Schließlich gelten noch die folgenden Gesetze für die Bildung von Komplementen:

$$\begin{aligned} A \cup A^C = \Omega \quad &\text{und} \quad A \cap A^C = \emptyset, \\ (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad &\text{und} \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C, \\ (A^C(^C) = A. \end{aligned}$$

2.4. Tupel und kartesische Produkte

Mengen sind nicht geordnete Zusammenfassungen von Objekten. Die Mengen $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ sind also gleich. Ist hingegen auch die Reihenfolge zweier Objekte von Bedeutung, kann dieses durch das Konzept des **Tupels** erfasst werden. Sollen beispielsweise die beiden Objekte a und b in der Weise geordnet zusammengefasst werden, daß b vor a kommt, so werden sie in dem Tupel (b, a) zusammengefasst. Dabei ist b die erste **Komponente** dieses Tupels und a die zweite. Aufgrund der ordnungsgebenden Eigenschaft des Tupels gilt $(b, a) \neq (a, b)$; zwei Tupel sind nur dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten jeweils übereinstimmen.

Beispiel 2.6: Die beiden Tupel $(\text{Karo}, 3)$ und $(\text{Herz}, \text{Ass})$ kann man verwenden, um die beiden entsprechenden Spielkarten zu repräsentieren. Die Menge aller Spielkarten eines französischen Blatts ist dann $B := \{(f, w) \mid f \in \{\text{Kreuz}, \text{Pik}, \ \text{Herz}, \text{Karo}\} \text{ und } w \in \{2, 3, \ldots, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass}\}\}$. Für jede Hand H zu Beginn eines Doppelkopfspiels gilt nun $H \subset B$ und $|H| = 13$.

Wie in dem vorangehenden Beispiel gesehen ist es oft sinnvoll, nicht nur einzelne Tupel, sondern eine Menge von Tupeln zu betrachten. Oft entstehen solche Mengen von Tupeln durch die Forderung an ihre einzelnen Elemente, daß deren erste Komponente Element einer Menge A und deren zweite Komponente Element einer Menge B sein soll. Genau diese Menge entsteht, indem man das sogenannte **kartesische Produkt** $A \times B$ aus den Mengen A und B bildet.

Beispiel 2.7:
a) Sei $A := \{1, 2\}$ und $B := \{a, b\}$. Dann ist $A \times B = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b)\}$.
b) Die Menge aller Felder eines Schachbretts ist $\{A, B, \ldots, H\} \times \{1, 2, \ldots, 8\}$.

Eine offensichtliche Verallgemeinerung des Konzepts des Tupels ist eine geordnete Zusammenfasung nicht nur von zwei, sondern von beliebig vielen Objekten. Deartige Zusammenfassungen heißen **n-Tupel**. Dabei gibt $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Komponenten des Tupels an.[3] Mengen von n-Tupeln gleicher Art können analog zum oben beschriebenen Vorgehen über die Bildung n-facher kartesischer Produkte definiert werden.

Beispiel 2.8: Sei $A := \{u, v, w\}$ und $B := \{x, y, z\}$.
a) (u, v, z) ist ein 3-Tupel und Element von $A \times A \times B$.
b) (u, w, w, v, v, u) ist ein 6-Tupel und Element von $A \times A \times A \times A \times A \times A$. Verkürzend kann man dafür A^6 (sprich: A hoch 6) schreiben.
c) Die Menge des Funktionsgraphs von $y = f(x)$ ist das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Dieses Konzept kann natürlich beliebig nach $\mathbb{R}^n$ erweitert werden.

[3] $\mathbb{N}$ bezeichnet, wie in Abschnitt 1.2 noch ausführlich beschrieben wird, die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

3. Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

In diesem Kapitel wird der Begriff der Funktion behandelt. Er ist von Bedeutung, da er es ermöglicht, die Abhängigkeit einer Variablen von einer weiteren, unabhängigen Variablen geordnet zu beschreiben und zu analysieren.

3.1. Grundbegriffe

Unter einer **Funktion** versteht man eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem Element x einer Menge D eindeutig ein Element einer Menge W zuordnet. Die Menge D heißt dabei auch **Definitionsbereich** der Funktion f und die Menge W **Wertebereich**. Man schreibt dafür im Regelfall (wenn Definitions- und Wertebereich feststehen)

$$y = f(x).$$

Dabei bezeichnet man x als **Argument** oder auch als **unabhängige Variable** und y als **Funktionswert** oder als **abhängige Variable**.

Wird eine Funktion f mit $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich betrachtet, so heissen alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ **Nullstellen** von f und $f(0)$ **y-Achsenabschnitt**.

Beispiel 3.1: Sei $f(x) = 4x^2 - 1$ eine Funktion mit $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich. Dann sind $1/2$ und $-1/2$ die Nullstellen und -1 der y-Achsenabschnitt von f.

In diesem Skriptum werden ausschließlich Funktionen behandelt, deren Definitions- und Wertebereich Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

3.2. Graphische Darstellung von Funktionen

Funktionen mit $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich werden häufig in der euklidschen Ebene veranschaulicht, indem man jener ein rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem überlagert. In diesem Koordinatensystem wird der Wert der unabhängigen Variablen horizontal entlang der sogenannten x-Achse dieses Koordinatensystems und der Wert der abhängigen Variablen vertikal entlang der sogenannten y-Achse aufgetragen.[1] Für eine beliebige Funktion $f(x)$ ist nun die Menge aller Punkte

$$\{(x, y) | x \in D \land y = f(x)\},$$

in das vorgegebene Koordinatensystem eingetragen, der **Graph** von f.

[1] Die x-Achse wird oft auch als Abszisse und die y-Achse als Ordinate bezeichnet.

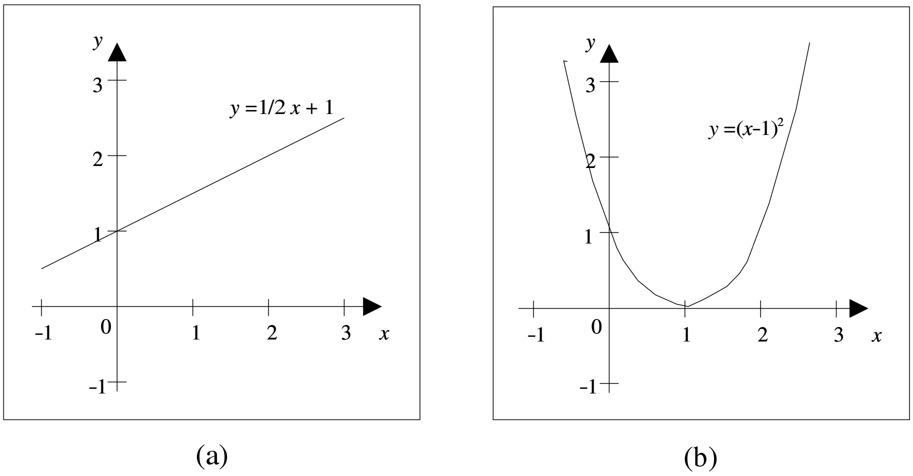


Abbildung 3.1.: Graphen zu den Funktionen $y = 1/2x + 1$ und $y = (x-1)^2$

Beispiel 3.2: In Abbildung 3.1 sind die Graphen der Funktionen $y = 1/2x+1$ und $y = (x-1)^2$ dargestellt.

4. Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

In diesem Kapitel wird das Konzept der Ableitung von Funktionen behandelt. Es ist zentraler Bestandteil der klassischen Optimierungstheorie, welche wiederum für die Modellierung menschlichen Verhaltens in den Wirtschaftswissenschaften von Bedeutung ist.

4.1. Das Konzept der Ableitung

Der Koeffizient a einer linearen Funktion $f(x) := ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wird in der Regel als **Steigung** dieser Funktion bezeichnet, da er angibt, um wieviel Einheiten der Funktionswert von $f(x)$ steigt, wird das Argument x um eine Einheit erhöht. Soll nun der Begriff der Steigung auf nicht-lineare Funktionen übertragen werden, ist zu berücksichtigen, daß der Funktionswert derartiger Funktionen bei Erhöhung des Arguments um eine Einheit unterschiedlich stark ansteigen kann, abhängig davon, auf welches absolute Niveau das Argument angehoben wird. An dieser Stelle kommt das Konzept der Ableitung zum Tragen.

Sei im folgenden $f(x)$ eine stetige, reellwertige Funktion. Man kann nun die **durchschnittliche Steigung** von $f(x)$ zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ mit $x_0, \Delta x \in \mathbb{R}$ und $\Delta x \neq 0$ angeben mit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dieser Quotient heißt auch **Differenzenquotient** und wird in Abbildung 4.1 veranschaulicht.

Betrachtet man nun den Wert des Differenzenquotienten für beliebig kleine $|\Delta x| \neq 0$ oder, formaler ausgedrückt, den **Grenzwert** des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$, so erhält man die sogenannte **Ableitung** von $f(x)$ an der Stelle x_0. Sie wird üblicherweise mit den Symbolen $f'(x_0)$ oder auch $\frac{df(x_0)}{dx}$ bezeichnet.[1]

Anschaulich betrachtet gibt der Differenzenquotient die Steigung der Strecke zwischen den Punkten P und Q an (vgl. Abbildung 4.1), einer sogenannten **Sekante**, wohingegen die Ableitung die Steigung der Geraden t angibt, welche den Graphen von $f(x)$ im Punkt P zwar berührt, aber nicht schneidet, einer sogenannten **Tangente**.

Man beachte, daß nicht für alle Funktionen für ihren gesamten jeweiligen Definitionsbereicht eine Ableitung angegeben werden kann, da der weiter oben erwähnte Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ nicht in jedem Fall existiert. Kann aber die Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 angegeben werden, so heißt diese Funktion **differenzierbar** in x_0. Ist eine Funktion für alle Elemente ihrer Definitionsmenge differenzierbar, so heißt sie einfach nur differenzierbar.

[1] Der Begriff des Grenzwerts wird in Rahmen dieses Wiederholungskurses nur intuitiv verwendet. Seine exakte Verwendung wird in der Vorlesung Mathematik A (Analysis) vorgestellt werden.

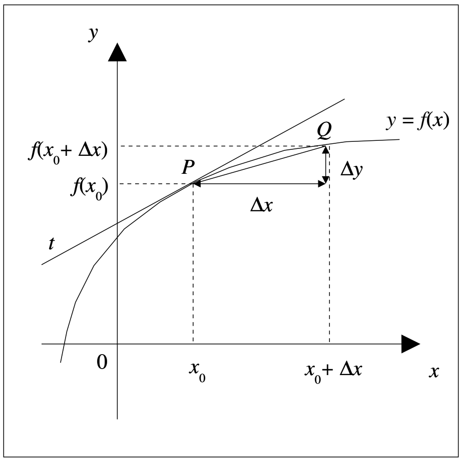


Abbildung 4.1.: Veranschaulichung des Differenzenquotienten

Ermittelt man für eine solche, differenzierbare Funktion $f(x)$ ihre Ableitung allgemein für alle Elemente ihres Definitionsbereichs, so erhält man eine neue Funktion $f'(x)$, deren Funktionswert für alle Elemente des Definitionsbereichs von $f(x)$ der Ableitung von $f(x)$ an eben dieser Stelle entspricht. Diese Funktion $f'(x)$, die ebenfalls als Ableitung bezeichnet wird, kann nun unter Umständen ihrerseits abgeleitet werden. Die sich dann ergebende Funktion heißt auch **zweite Ableitung** von $f(x)$ und wird mit den Symbolen $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ oder auch $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ bezeichnet. Analog sind für alle $n \in \mathbb{N}$ höherrangige Ableitungen definiert.

Beispiel 4.1:
a) Sei $f(x) := x^2$. Dann ist der Differenzenquotient von $f(x)$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}.$$

Nach einigen Umformungsschritten erhält man daraus

$$2x_0 + \Delta x.$$

Aus dieser Darstellung des Differenzenquotienten wird nun deutlich, daß jener für $\Delta x \to 0$ den Wert $2x_0$ annimmt. Die Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist also $2x_0$; $f'(x) = 2x$.
b) Betrachtet man nun den Differenzenquotienten von $f'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, also den Ausdruck

$$\frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{\Delta x},$$

und geht man wie unter a) vor, so ergibt sich, daß die Ableitung von $f'(x)$ für alle Elemente des Definitionsbereichs 2 ist, und somit für die zweite Ableitung von $f(x)$ gilt: $f''(x) = 2$.
c) Sei $g(x) := |x|$.[2] Der Differenzenquotient von $g(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ ist dann

$$\frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

[2] $|x|$ bezeichnet den sogenannten Betrag einer reellen Zahl x. Dabei ist $|x|$ für $x \geq 0$ gleich x und für $x < 0$ gleich $-x$.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^a\ (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$a^x\ (a > 0)$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x\ (a > 0)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Tabelle 4.1.: Ableitungen ausgewählter Funktionen

Für beliebig kleine $|\Delta x| > 0$ hat dieser Differenzenquotient für $\Delta x > 0$ den Wert 1 und für $\Delta x < 0$ den Wert -1. Es existiert also kein Grenzwert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$, und die Funktion $g(x)$ ist an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

4.2. Ableitungen ausgewählter Funktionen

Da die analytische Bestimmung einer Ableitung über den Differenzenquotienten sehr viel Zeit in Anspruch nimmt und gelegentlich überhaupt nur über die Anwendung fortgeschrittener Techniken möglich ist, ist es sinnvoll, die Ableitungen häufig auftretender Funktionen auswendig zu kennen. In Tabelle 4.1 sind die Ableitungen ausgewählter Funktionen zusammengestellt.

4.3. Ableitungsregeln

Oftmals sind Funktionen abzuleiten, die aus anderen Funktionen, deren Ableitungen bekannt sind, zusammengesetzt sind. In diesem Fall sind die in diesem Abschnitt zusammengestellten Ableitungsregeln sehr nützlich. Seien nachfolgend $g(x)$ und $h(x)$ zwei reellwertige und differenzierbare Funktionen:

Nach der **Faktorregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := ag(x)$$

mit $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f'(x) = ag'(x).$$

Nach der **Summenregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := g(x) + h(x)$$

die Funktion

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

Nach der **Produktregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := g(x) \cdot h(x)$$

die Funktion

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Nach der **Quotientenregel** ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \frac{g(x)}{h(x)}$$

mit $h(x) \neq 0$ die Funktion

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}.$$

Schließlich ist nach der **Kettenregel** die Ableitung der Funktion

$$f(x) := g(h(x))$$

die Funktion

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Natürlich ist es oft erforderlich, die oben genannten Ableitungsregeln kombiniert anzuwenden, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen.

Beispiel 4.2:
a) Die Ableitung von $f(x) := 3\sin x$ ist nach der Faktorregel $f'(x) = 3\cos x$.
b) Die Ableitung von $f(x) := 4x^2 + 5x + \ln x$ ist nach der Summen- und der Faktorregel $f'(x) = 8x + 5 + 1/x$.
c) Die Ableitung von $f(x) := 4x\sin x$ ist nach der Produkt- und der Faktorregel $f'(x) = 4\sin x + 4x\cos x$.
d) Die Ableitung von $f(x) := \frac{x^2}{e^x}$ ist nach der Quotientenregel $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$.
e) Die Ableitung von $f(x) := 2\sin\left(x^3\right)$ ist nach der Ketten- und der Faktorregel $f'(x) = 6x^2\cos\left(x^3\right)$.

5. Kurvendiskussion

Bei der Kurvendiskussion wird eine Funktion durch ihre Eigenschaften beschrieben. Wir behandeln die folgenden Eigenschaften:

1. Nullstellen
2. Monotonie
3. Definitionslücken/Polstellen
4. Wendepunkte
5. Sattelpunkte
6. Extrema (Minima und Maxima)

5.1. Nullstellen

Definition 5.1.1. *Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle, wenn gilt*

$$f(x_0) = 0$$

Wir sind hier an Nullstellen interessiert, die reelle Zahlen sind. Wir haben bereits gelernt die Nullstellen von quadratischen Funktionen mittels der p,q-Formel zu bestimmen. Wir sahen, dass eine quadratische Funktion entweder zwei, eine oder keine reelle Nullstelle hat. Dies lässt sich auf Polynome verallgemeinern.

Theorem 5.1.1. *Gegeben sei ein Polynom vom Grad n*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Dieses Polynom hat n Nullstellen (nicht unbedingt verschieden, nicht unbedingt reelle Zahlen) und

wenn alle Nullstellen reelle Zahlen sind, lässt sich das Polynom faktorisieren als

$$f(x) = a_n(x - b_1)(x - b_2)(x - b_3) \ldots (x - b_n)$$

Hier sind $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ die Nullstellen des Polynoms

Wir betrachten nun Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen des Typs

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind. Hier müssen die Nullstellen des Zählers gefunden werden, wobei zu beachten ist, dass an den gefundenen Stellen der Nenner ungleich Null sein muss.

Beispiel 5.1.1. *Bestimmen sie die Nullstellen von* $f(x) = \frac{(x-1)}{x^2-2x-3}$. *Der Zähler ist bei* $x_0 = 1$ *gleich Null. Da der Nenner der Funktion bei* $x_0 = 1$ *ungleich Null ist, ist* $x_0 = 1$ *die Nullstelle der Funktion.*

Beispiel 5.1.2. *Berechnen sie die reellen Nullstellen der folgenden Funktionen und finden sie gegebenenfalls die Faktorisierung des Polynoms:*

1. $f(x) = 4 - 3x$
2. $f(x) = (x-2)^2 - 4$
3. $f(x) = x^2 + 5$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$
5. $(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

5.2. Monotonie

Definition 5.2.1. *Monotonie einer Funktion* $f(x)$. *Es sei* $x_2 > x_1$. *Dann ist die Funktion*

1. *monoton steigend, wenn gilt* $f(x_2) \geq f(x_1)$.
2. *streng monoton steigend, wenn gilt* $f(x_2) > f(x_1)$.
3. *monoton fallend, wenn gilt* $f(x_2) \leq f(x_1)$.
4. *streng monoton fallend, wenn gilt* $f(x_2) < f(x_1)$.

Die obige Definition von Monotonie ist allgemeingültig. Wenn die Funktion zusätzlich differenzierbar ist, kann man die 1. Ableitung verwenden um Monotonie festzustellen

Definition 5.2.2. *Es sei* $f(x)$ *eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Funktion*

1. *monoton steigend, wenn gilt* $f'(x) \geq 0$.
2. *streng monoton steigend, wenn gilt* $f'(x) > 0$.
3. *monoton fallend, wenn gilt* $f'(x) \leq 0$.
4. *streng monoton fallend, wenn gilt* $f'(x) < 0$.

Beispiel 5.2.1. *Überprüfen sie die folgenden Funktionen auf Monotonie.*

1. $f(x) = 2x - 2$
2. $f(x) = x^3$
3. *In welchen Intervallen ist die Funktion* $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ *monoton?*

5.3. Definitionslücken/Polstellen

Wir haben am Anfang dieses Kurses schon geklärt was der Definitionsbereich einer Funktion ist. Wenn die Funktion innerhalb eines Intervalls an einem Punkt nicht definiert ist (zum Beispiel teilen durch Null) , hat die Funktion dort eine Definitionslücke. Zum Beispiel hat $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle 0 eine Definitionslücke.

Wir betrachten hier nur die Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion der Art

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome darstellen.

Definition 5.3.1. *Eine gebrochen rationale Funktion*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

*hat an einer Stelle x_0 eine Polstelle, wenn $q(x_0) = 0$ **und** der Betrag des Funktionswertes $|f(x)|$ bei einer Annäherung gegen x_0 gen unendlich geht.*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$$

Notiz:

1. *Polstellen sind Definitionslücken der Funktion*
2. *Wenn an der Stelle x_0 auch der Nenner Null wird ($q(x_0) = 0$), handelt es sich nicht um eine Polstelle, sondern um eine hebbare Definitionslücke*
3. *Hebbare Definitionslücken können entfernt werden, in dem man Zähler und Nenner faktorisiert und der Term, der zu der hebbaren Definitionslücke gehört, gekürzt werden kann.*

Beispiel 5.3.1. *Finden sie die Polstellen und/oder hebbaren Definitionslücken der folgenden Funktionen:*

1. $f(x) = \frac{1}{x-3}$
2. $f(x) = \frac{4-6x}{9x^3-4x}$
3. $f(x) = \frac{2x^2+2x-12}{6x^2-12x}$

5.4. Wendepunkte

Hier besprechen wir das Krümmungsverhalten einer 2-fach differenzierbaren Funktion $f(x)$. Die Krümmung des Graphen einer Funktion hängt von der 2. Ableitung ab, da diese die Veränderung der Steigung der Funktion darstellt.

1. Wenn $f'(x)$ sich nicht verändert ist die Funktion linear und hat für alle Werte von x die gleiche Steigung.
2. Wenn $f'(x)$ stetig zunimmt, ist $f''(x) > 0$.
3. Wenn $f'(x)$ stetig abnimmt, ist $f''(x) < 0$.

Aus dieser Beschreibung geht nun unsere Definition von Wendepunkten hervor.

Definition 5.4.1. *Ein Punkt x_0 im Definitionsbereich der 2-fach differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist ein Wendepunkt, wenn sich an diesem Punkt das Vorzeichen der 2. Ableitung ändert (von + auf minus oder umgekehrt). Am Wendepunkt gilt folglich $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung)*

Leider kann durch eine Betrachtung der 2. Ableitung nicht abschließend geklärt werden, ob es sich um einen Wendepunkt handelt. Hierfür verwenden wir die folgenden hinreichenden Bedingungen.

Definition 5.4.2. *Hinreichende Bedingungen für eine Wendepunkt. Gegeben sei ein Punkt x_0, an dem gilt $f''(x_0) = 0$*

1. *Wenn zusätzlich gilt $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 ein Wendepunkt.*

2. Wenn $f''(x_0) = ... = f^{n-1}(x_0) = 0$ und $f^n(x_0) \neq 0$ und $n > 2$ ist ungerade. Dann ist x_0 ein Wendepunkt

3. (ohne 3. Ableitung) Wenn $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt ist x_0 ein Wendepunkt.

Beispiel 5.4.1. *Identifizieren Sie die Wendepunkte der folgenden Funktionen:*

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

2. $f(x) = x^4 - x$

5.5. Extrema

Ein wichtiger Teil der Kurvendiskussion dient der Identifikation von Extrema (Minima und Maxima) von Funktionen.

Minima und Maxima können lokaler oder globaler Natur sein. Wir definieren diese Begriffe für Maxima und verlassen uns auf unsere Fähigkeiten dies auch für Minima zu tun.

Definition 5.5.1. *Globales vs. lokales Maximum einer Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D. Ein Punkt x^* ist ein*

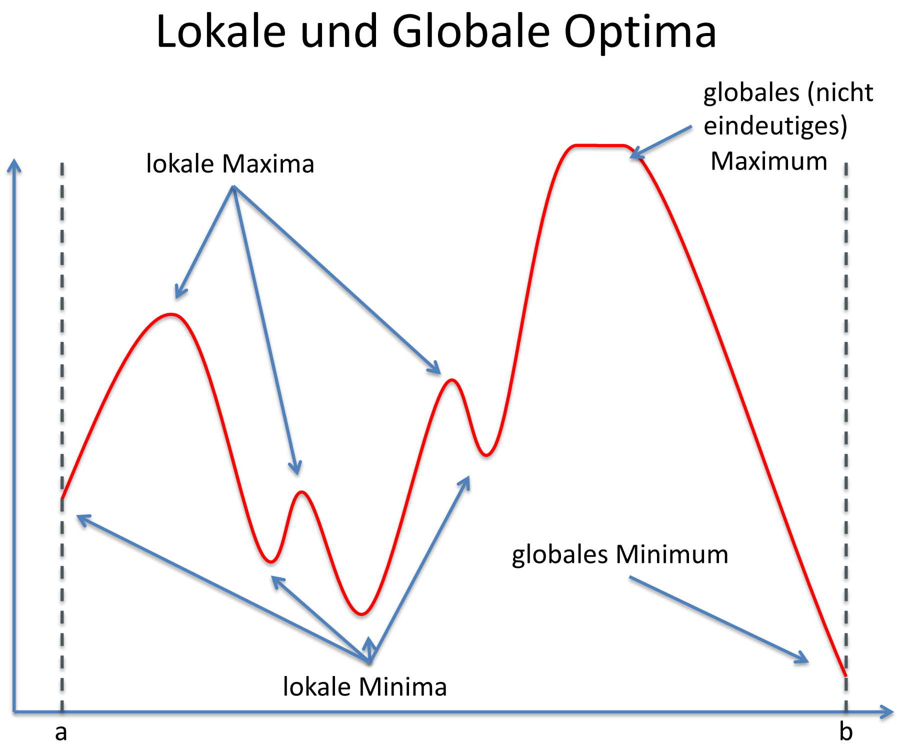
1. globales Maximum für $f(x)$ auf D, wenn gilt $f(x^*) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.

2. striktes globales Maximum für $f(x)$ auf D, wenn gilt $f(x^*) > f(x)$ für alle $x \in D$.

3. lokales (relatives) Maximum für $f(x)$ auf D, wenn gilt $f(x^*) \geq f(x)$ für alle x, die nah an x^* sind.

4. striktes lokales (relatives) Maximum für $f(x)$ auf D, wenn gilt $f(x^*) > f(x)$ für alle x, die nah an x^* sind.

Die folgende Abbildung verdeutlicht diese Definitionen



Das Optimierung einer differenzierbaren Funktion von einer Variablen ist in vielen Fällen (relativ) unkompliziert, aber es können auch Komplikationen auftreten. Zum Beispiel:

1. Das globale Minimum/Maximum kann am Rand des Definitionsbereichs auftreten, an dem die Funktion nicht differenzierbar ist.
   Maximiere $y = x^2$ im Definitionsbereich des Intervalls $[2, 4]$
2. Das globale Minimum/Maximum kann nicht existieren.
   Maximiere $y = x^2$ im Definitionsbereich des Intervalls $(2, 4)$
3. Das globale Minimum/Maximum ist an einer Stelle, an der die Funktion nicht differenzierbar oder nicht stetig ist
   Minimiere $y = |x|$

Wir beschränken uns in diesem Kurs auf lokale Extrema im Inneren des Definitionsbereichs von differenzierbaren Funktionen und vermeiden somit zwei der drei oben genannten Komplikationen (welche?).

Wann erreicht eine Funktion ihren maximalen (oder minimalen Funktionswert)? Um diese Frage zu beantworten schauen wir auf die erste Ableitung der Funktion

1. Wenn gilt $f'(x) > 0$, dann steigt der Funktionswert.
2. Wenn gilt $f'(x) < 0$, dann fällt der Funktionswert.

Bei einem Maximum steigt der Funktionswert ($f'(x) > 0$) bis zum Erreichen des Maximums und fällt dann wieder ($f'(x) < 0$). Bei einem Minimum fällt der Funktionswert ($f'(x) < 0$)

bis zum Erreichen des Minimums und steigt dann wieder ($f'(x) > 0$). Wir können also darauf schließen, dass am Minimum und am Maximum gilt

$$f'(x) = 0$$

Theorem 5.5.1. *(Notwendige Bedingungen Erster Ordnung für ein Extremum) Es sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion und x^* ein lokales Maximum von $f(x)$. Dann gilt*

$$f'(x^*) = 0$$

Das gleiche Resultat gilt auch für lokale Minima. Diese Punkte werden als stationäre Punkte bezeichnet.

Beispiel 5.5.1. *Identifizieren sie die stationären Punkte der folgenden Funktionen.*

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + 5$

Wie meistens ist die Sache natürlich nicht so einfach. Obwohl wir die stationären Punkte von Funktionen meistens identifizieren können, ist nicht garantiert, dass an diesen Stellen auch Extrema vorliegen. Das liegt daran, dass $f'(x) = 0$ nur eine **notwendige** Bedingung für ein Maximum darstellt

$$f(x) \text{ hat an } x^* \text{ ein Extremum} \implies f'(x^*) = 0$$

Die Implikation gilt nur in die eine Richtung und besagt NICHT, dass ein Maximum vorliegt, wenn $f'(x^*) = 0$.
Wir müssen uns also anderweitig Information besorgen, um zu entscheiden, ob ein Extremum vorliegt. Wir schauen uns deshalb auch die 2. Ableitung am stationären Punkt x^* an.

Theorem 5.5.2 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum)**.** *Es sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion und x^* ein lokales Maximum von $f(x)$.*

1. *Wenn gilt $f''(x^*) > 0$ liegt an x^* ein lokales Minimum vor.*
2. *Wenn gilt $f''(x^*) < 0$ liegt an x^* ein lokales Maximum vor.*

Intuituion

1. *Wir nehmen an, dass $f(x)$ am Punkt x^* ein Extremum hat. An einem Minimum gilt*
   a) *$f'(x) < 0$ für Werte $x < x^*$*
   b) *$f'(x) > 0$ für Werte $x > x^*$*

   Kombiniert man beide Fälle, muss die 2. Ableitung in einer Umgebung von x^* positiv sein. Wenn also gilt $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) > 0$ muss ein Minimum der Funktion am Punkt x^* vorliegen
2. *An einem Maximum gilt*
   a) *$f'(x) > 0$ für Werte $x < x^*$*
   b) *$f'(x) < 0$ für Werte $x > x^*$*

   Kombiniert man beide Fälle, muss die 2. Ableitung in einer Umgebung von x^* negativ sein. Wenn also gilt $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) < 0$ muss ein Maximum der Funktion am Punkt x^* vorliegen

Was aber passiert wenn $f''(x^*) = 0$. Wir müssen unser Kriterium auf weitere Ableitungen der Funktion ausweiten, denn in diesem Fall kann an der Stelle x^* entweder ein Extremum oder ein Sattelpunkt sein. Wir behandeln den ersten Fall zuerst.

Theorem 5.5.3. *Gegeben sei eine n-fach differenzierbare Funktion $f(x)$ mit $f'(x^*) = f''(x^*) = 0$. Wir leiten nun die Funktion so lange ab bis*

$$f^n(x^*) \neq 0 \quad n > 2$$

1. *Wenn n gerade ist und $f^n(x^*) > 0$ liegt ein Minimum vor.*
2. *Wenn n gerade ist und $f^n(x^*) < 0$ liegt ein Maximum vor.*
3. *Wenn n ungerade ist, handelt es sich um einen sogenannten Sattelpunkt der Funktion.*

Beispiel 5.5.2. *Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen*

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^4$
3. $f(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x} - 4x^2$

5.6. Sattelpunkte

Auf der Suche nach Extrema kann es wie oben passieren, dass $f'(x^*) = 0$ ohne dass ein Extremum vorliegt. Dies ist an einem Sattelpunkt der Fall. Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt, an dem zusätzlich gilt $f'(x^*) = 0$

Definition 5.6.1. *Gegeben sei die n-fach differenzierbare Funktion $f(x)$ für die am Punkt x^* gilt*

$$f'(x^*) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) = 0$$

Der Punkt x^* ist ein Sattelpunkt, wenn gilt

1. $f'''(x^*) \neq 0$ *oder*
2. $f^n(x^*) \neq 0$ *mit n ungerade und alle vorherigen Ableitungen gleich Null.*

Beispiel 5.6.1. *Finden sie die Sattelpunkte der folgenden Funktionen*

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

6. Funktionstypen

6.1. Lineare Funktionen

Definition 6.1.1. *Eine lineare Funktion hat die Funktionsgleichung*

$$y = a + bx \quad mit \quad a, b \in R$$

Anmerkung:

1. *Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.*
2. *Die Konstante a heißt* ***Achsenabschnitt*** *und ist gleich dem Funktionswert, wenn $x = 0$*
3. *Die Konstante b heißt* ***Steigung*** *und gleicht der Veränderung des Funktionswertes, wenn x um eine Einheit erhöht wird. Sie wird zwischen 2 beliebigen Punkten berechnet als*

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

4. *Das besondere an einer linearen Funktion ist dass die Steigung überall gleich ist (hängt nicht von x ab.)*

Lineare Funktionen sind eigentlich ziemlich langweilig und nichts besonderes. Da sie aber in ihrer Handhabung relativ einfach sind und oft verwendet werden um komplexere Funktionen zu approximieren, lohnt es sich die lineare Funktion näher zu betrachten. Um die Funktionsgleichung einer linearen Funktion herauszubekommen muss man (nur) zwei Dinge wissen

1. Ein Punkt (x_1, y_1) und Steigung a.
   Die Formel der linearen Funktion ist gleich

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \underbrace{(y_1 - ax_1)}_{b} + ax}$$

2. Zwei Punkte Formel. Gegeben sind die 2 Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2)

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Um zu zeigen, dass die Formel gleich der zuerst genannten ist, verwenden wir zunächst die zwei Punkte um die Steigung zu berechnen.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dann setzen wir die Steigung in die Punkt-Steigungsformel ein

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad \Longleftrightarrow \quad y = \underbrace{(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1)}_{b} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x$$

3. Achsenabschnittsform
   Gegeben seien die Achsenabschnitte der y-Achse $(0, y_s)$ und x-Achse $(x_s, 0)$. Dann kann die lineare Gleichung geschrieben werden als
$$\frac{x}{x_s} + \frac{y}{y_s} = 1$$

Eigenschaften:

1. Wenn die Steigung $b > 0$ ist die Funktion streng monoton steigend.
2. Wenn die Steigung $b < 0$ ist die Funktion streng monoton fallend.

Beispiel 6.1: Verwenden Sie die gegebenen Informationen um die Gleichung der linearen Funktionen in der Form $y = a + bx$ herzuleiten

1. Steigung= 2 mit Punkt $(3, 4)$
2. Punkte $(3, 4)$ und $(5, 8)$
3. Die Gerade schneidet die x-Achse bei $x_s = 4$ und die y-Achse bei $y_s = -5$

6.2. Quadratische Funktionen

Definition 6.2.1. *Als quadratische Funktion bezeichnen wir im Allgemeinen die Funktion*
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
wobei a, b, c reelle Konstanten sind.

Notiz:

1. *Der Graph einer quadratischen Funktion ist ein Parabel*
2. *Eine quadratische Funktion hat entweder zwei, eine oder keine Nullstelle in $\mathbb{R}$*
3. *Zur Berechnung der Nullstellen einer quadratischen Funktion nimmt man die sogenannte p, q-Formel, wobei man zunächst die Gleichung in die Form $x^2 + px + q = 0$ bringt und dann anhand der folgenden Formel die Nullstellen $(x_{1,2})$ findet:*
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Beispiel 6.2: Finden Sie die Nullstellen der folgenden quadratischen Gleichungen:

1. $x^2 - 10x + 25 = 0$
2. $x^4 - 10x^2 - 24 = 0$

6.3. Polynome n-ten Grades

Definition 6.3.1. *Die Funktion P, die für alle x definiert ist durch*

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$$

wobei $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ Konstanten sind (mit $a_n \neq 0$) wird als Polynom n-ten Grades (oder auch ganzrationale Funktion) mit den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ bezeichnet.

1. *Definitionsbereich $= \mathbb{R}$*
2. *Man sieht, dass die lineare Funktion und die quadratische Funktion Spezialfälle sind.*
3. *Polynome sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar (also auch stetig)*

6.4. Gebrochenrationale Funktionen

Ganzrationale Funktionen sind die schon behandelten Polynome.

Definition 6.4.1. *Eine gebrochenrationale Funktion ist der Quotient zweier Polynome*

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n}$$

wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $b_0, b_1, \ldots, b_n$ reelle Zahlen sind.

1. *Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen, bei denen der Nenner nicht gleich Null wird.*
2. *Gebrochenrationale Funktion sind im gesamten Definitionsbereich differenzierbar (und somit auch stetig)*

6.5. Potenzfunktionen

Definition 6.5.1. *Die Funktion*

$$f(x) = x^n$$

heißt Potenzfunktion. Die Eigenschaften der Funktion hängen vom Wert der Konstanten n ab. Wir behandeln hier nur die Fälle, in denen der Exponent eine natürliche oder ganze Zahl ist.

1. $n \in \mathbb{N}$ und gerade (Parabel, sieht $f(x) = x^2$ sehr ähnlich)
   a) Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}$
   b) Streng monoton fallend im Intervall $(-\infty, 0)$, streng monoton steigend im Intervall $(0, \infty)$
2. $n \in \mathbb{N}$ und ungerade (sieht $f(x) = x^3$ sehr ähnlich)
   a) Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}$
   b) Streng monoton steigend in D
3. $n \in \mathbb{Z}^-$ und gerade (umgekehrte Parabel, sieht $f(x) = -x^2$ sehr ähnlich)

a) Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}\{0\}$,

b) Streng monoton wachsend im Intervall $(-\infty, 0)$, streng monoton fallend im Intervall $(0, \infty)$

c) Polstelle bei $x = 0$

4. $n \in \mathbb{Z}^-$ und ungerade (sieht $f(x) = -x^3$ sehr ähnlich)

   a) Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}\{0\}$

   b) Streng monoton fallend im Definitionsbereich

   c) Polstelle bei $x = 0$

6.6. Wurzelfunktionen

Definition 6.6.1. *Die Funktion*

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

mit $x > 0$ heißt Wurzelfunktion vom Grade n

1. *Die Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion (unter Annahme des korrekten Definitionsbereichs der Potenzfunktion)*

2. *Die Funktion kann auch als Potenzfunktion geschrieben werden*

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

3. *Definitionsbereich: Hier gilt die Konvention, dass die Wurzelfunktion nur für positive reelle Zahlen ($x \in \mathbb{R}^+$) definiert ist.*

6.7. Exponentialfunktion

Definition 6.7.1. *Eine Funktion der Form $f(x) = a^x \quad a > 0$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.*

1. *$D = \mathbb{R}$*

2. *Monotonie*

   a) *Streng monoton fallend für $0 < a < 1$*

   b) *Streng monoton steigend für $a > 1$*

Ein Spezialfall ist eine Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis. Zur Umformung wird folgende Beziehnung genutzt

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

Definition 6.7.2. *Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$ hat folgende Eigenschaften*

1. *Sie ist die einzige Funktion mit* $f'(x) = f(x)$ *und* $f(0) = 1$
$$\frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x \quad \textit{und} \quad e^0 = 1$$
2. $e^x e^y = e^{x+y}$
3. $e^x > 0$ *und* $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
4. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$

6.8. Logarithmusfunktionen

Die Logarithmusfunktion
$$f(x) = \log_a x$$
$y = \log_a x$ wird Logarithmus von x zur Basis a genannt und ist erfüllt die Gleichung $a^y = x$.

Definition 6.8.1. *Die Logarithmusfunktion* $f(x) = \log_a x$ *hat folgende Eigenschaften*

1. *Definitionsbereich* $\mathbb{R}^+$
2. *Wegen* $a^0 = 1$ *und* $a^1 = 1$ *gilt* $\log_a 1 = 0$ *und* $\log_a a = 1$
3. *Streng monoton steigend*
4. $\log_e x = \ln x$*, der Logarithmus zur Basis e ist der natürliche Logarithmus.*

6.9. Signumfunktion (Vorzeichenfunktion)

Die Signumfunktion ist wie folgt definiert

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

1. Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, Wertebereich: $\{-1, 0, 1\}$
2. Stetig auf $\mathbb{R}/\{0\}$

6.10. Betragsfunktion

Die Betragsfunktion ist wie folgt definiert

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

1. Definitionsbereich: $\mathbb{R}$, Wertebereich: $\mathbb{R}_0^+$
2. Stetig auf $\mathbb{R}$
3. Differenzierbar auf $\mathbb{R}/\{0\}$

7. Gleichungen mit einer Unbekannten

In diesem Kapitel werden die unterschiedlichen Arten von Gleichungen und das Auflösen von Bestimmungsgleichungen wiederholt.

7.1. Arten von Gleichungen

In diesem Abschnitt behandeln wir **Bestimmungsgleichungen** (im folgenden nur Gleichungen genannte), deren konstitutives Merkmal ist, daß sie jeweils eine Variable enthalten, deren Wert unbekannt ist. Eine solche Variable, deren Wert grundsätzlich jede reelle Zahl sein kann, wenn nicht ausdrücklich anderes gefordert wird, heißt daher **Unbekannte**. Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Menge der reellen zahlen, die die Gleichung zu einer wahren Aussage macht.[1]

Beispiel 7.1:
a) Sei $3x+4 = 10$ eine Bestimmungsgleichung mit x als Unbekannter. Dann ist, wie man durch Einsetzen in die Bestimmungsgleichung leicht feststellt, der Wert von x implizit als 2 festgelegt. Die Lösungsmenge der betrachteten Bestimmungsgleichung ist also $\{2\}$.
b) Sei $2b^2 = 18$ eine Bestimmungsgleichung mit b als Unbekannter. Dann ist, wie man wiederum durch Einsetzen feststellt, der Wert von b implizit als 3 oder als -3 festgelegt. Die Lösungsmenge ist also $\{3, -3\}$.
c) Sei $5b = x$ eine Bestimmungsgleichung mit b als Unbekannter. Dann ist der Wert von b implizit als $x/5$ festgelegt, und die Lösungsmenge ist $\{x/5\}$.

7.2. Äquivalente Umformung von Gleichungen

Natürlich ist die Lösungsmenge einer Bestimmungsgleichung nicht immer unmittelbar erkennbar. In diesen Fällen gilt es, die Bestimmungsgleichung mit Hilfe geeigneter Rechenoperationen gegebenenfalls in mehreren Schritten so lange umzuformen, bis die Unbekannte auf einer Seite isoliert ist und die Lösungsmenge damit leicht bestimmt werden kann. Man sagt dann, die Gleichung sei nach der Unbekannten **aufgelöst**. Geeignete Rechenoperationen sind dabei neben gewöhnlichen Termumformungen die sogenannten Äquivalenzumformungen.

Eine **Äquivalenzumformung** einer Bestimmungsgleichung ist dabei dadurch gekennzeichnet, daß sie die Lösungsmenge dieser Gleichung nicht verändert. Dieses ist beispielsweise bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der bzw. mit der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Bestimmungsgleichung der Fall. Lediglich die Multiplikation mit 0 ist keine Äquivalenzumformung.

[1] Grundsätzlich werden vier Arten von Gleichungen unterschieden: **Identische Gleichungen** (z.B. $2+2=4$ oder $a+b=b+a$), **Funktionsgleichungen** (z.B. $y=x^2$) und **Definitionsgleichungen** wird ein Symbol als Bezeichner eines komplexeren mathematischen Ausdrucks festgelegt (z.B. $p := (3q-5)^2 - 4$)

Beispiel 7.2:
a) Sei $5x-(5-2x)=3x+7$ eine Bestimmungsgleichung mit x als Unbekannter. Dann erbringt die folgende Kette von Term- und Äquivalenzumformungen,

$$\begin{aligned} 5x-(5-2x) &= 3x+7 && |\,\text{Auflösen der Klammer} \\ 5x-5+2x &= 3x+7 && |\,\text{Zusammenfassen der } x\text{-Glieder} \\ 7x-5 &= 3x+7 && |-3x \\ 4x-5 &= 7 && |+5 \\ 4x &= 12 && |:4 \\ x &= 3 && |\,\text{Gleichung aufgelöst,} \end{aligned}$$

daß $\{3\}$ die Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist.
b) Sei $\frac{2}{x-1}=\frac{4}{x+1}$ eine Bestimmungsgleichung mit x als Unbekannter und gelten zusätzlich die Forderungen $x \neq 1$ und $x \neq -1$. Dann erbringt die folgende Kette von Term- und Äquivalenzumformungen,

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{x-1} &= \tfrac{4}{x+1} && |\cdot(x-1) \\ 2 &= \tfrac{4(x-1)}{x+1} && |\cdot(x+1) \\ 2(x+1) &= 4(x-1) && |\,\text{Ausmultiplizieren der Klammern} \\ 2x+2 &= 4x-4 && |-2x \\ 2 &= 2x-4 && |+4 \\ 6 &= 2x && |:2 \\ 3 &= x && |\,\text{Gleichung aufgelöst,} \end{aligned}$$

daß $\{3\}$ die Lösungsmenge dieser Bestimmungsgleichung ist. Man beachte, daß die beiden Multiplikationen der Bestimmungsgleichung mit $x-1$ bzw. $x+1$ Äquivalenzumformungen sind, da nach Voraussetzung $x \neq 1$ und $x \neq -1$ gilt und somit nicht mit 0 multipliziert wird, was unzulässig wäre.

7.3. Lösung nichtlinearer Gleichungen

Obgleich mit den im vorangehenden Abschnitt vorgestellten, auf den vier Grundrechenarten basierenden Äquivalenzumformungen bereits viele in der wirtschaftswissenschaftlichen Praxis auftretenden Gleichungen aufgelöst werden können, existieren Arten von Gleichungen, für die dieses nicht zutrifft. In diesem Abschnitt werden einige solcher Gleichungen behandelt und geeignete Lösungsverfahren vorgestellt.

Eine Gleichung der Form

$$x^2+px+q=0$$

mit $p,q \in \mathbb{R}$ und x als Variable heißt **quadratische Gleichung**. Eine deartige Gleichung hat entweder keine, eine oder zwei Lösungen, welche sich mit Hilfe der sogenannten **pq-Formel**

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

ermitteln lassen. Diese Formel besagt, daß die oben angegebene quadratische Gleichung für $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$ zwei Lösungen hat, nämlich

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{und} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ eine Lösung, nämlich

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

und für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ keine Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl nicht definiert ist.[2]

Beispiel 7.3:
a) Die Gleichung $x^2 + 2x - 15 = 0$ hat nach der pq-Formel $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm 4$ die Lösungsmenge $\{3, -5\}$.
b) Die Gleichung $x^2 + 4x + 10 = 0$ hat nach der pq-Formel $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-10}$ keine Lösung, da $\sqrt{-6}$ nicht definiert ist.

Gegebenenfalls ist es erforderlich, eine quadratische Gleichung über einige Äquivalenzumformungen in die entsprechende, oben gegebene Form zu bringen, bevor die pq-Formel auf sie angewendet werden kann.

Eine Gleichung der Form

$$x^a = b$$

mit $a \neq 0$, $b > 0$ und $x > 0$ als Variable heißt **Potenzgleichung**. Eine Lösung einer solchen Gleichung ist immer

$$x = \sqrt[a]{b} = b^{1/a}.$$

Ist der Exponent a eine gerade ganze Zahl, so ist darüberhinaus $x = -\sqrt[a]{b}$ eine Lösung. Ist der Exponent a eine ungerade ganze Zahl, so kann auch ein $b < 0$ zugelassen werden, und es ist $x = -\sqrt[a]{-b}$ die einzige Lösung der Exponentialgleichung.

Beispiel 7.4:
a) Die Lösung der Gleichung $x^{1/8} = 3$ ist $x = \sqrt[1/8]{3} = 3^8 = 6561$.
b) Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 = 81$ ist $\{3, -3\}$.
c) Die Lösung von $x^3 = -8$ ist $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Eine Gleichung der Form

$$a^x = b$$

mit $a, b > 0$, $a \neq 1$ und x als Variable heißt **Exponentialgleichung**. Ihre Lösung ist

$$x = \frac{\ln b}{\ln a},$$

wie nachfolgend unter Ausnutzung der Tatsache, daß das Logarithmieren einer Bestimmungsgleichung, deren linke und rechte Seite beide größer als 0 sind, eine Äquivalenzumformung ist, gezeigt wird:

$$\begin{aligned} a^x &= b & &|\,\ln \\ \ln a^x &= \ln b & &|\,\text{Potenzrechengesetz} \\ x \ln a &= \ln b & &|\,\ln \\ x &= \tfrac{\ln b}{\ln a} & &|\,\text{Gleichung aufgelöst.} \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Division durch $\ln a$ wegen $a \neq 1$ immer zulässig ist.

[2] Tatsächlich ist die Wurzel einer negativen reellen Zahl eine sogenannte komplexe Zahl. Auf komplexe Zahlen wird im Rahmen dieses Kurses jedoch nicht eingegangen.

8. Ungleichungen mit einer Unbekannten

In diesem Kapitel werden Techniken zur Bestimmung der Lösungsmengen von Ungleichungen wiederholt.

8.1. Grundbegriffe

Ähnlich wie verschiedene Arten von Gleichungen existieren, gibt es auch mehrere Arten von Ungleichungen, so unter anderem identischen Gleichungen ähnliche, die eine wahre Aussage beschreiben, wie etwa $2 > 1$ und $x + 10 > x$.

Desweiteren existieren noch solche Ungleichungen, die eine enge Verwandtschaft zu den Bestimmungsgleichungen aufweisen. Auch ihr herausragendes Merkmal ist, daß sie jeweils eine unbekannte Variable enthalten, deren tatsächlich mögliche Werte unbekannt, aber durch die Ungleichung implizit festgelegt sind, nämlich als diejenige Werte, für die die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt. Auch eine solche Ungleichung kann also als eine Aussageform aufgefaßt werden, deren Lösungsmenge die Menge all der Werte ist, die die Unbekannte in der Ungleichung annehmen kann, damit jene eine wahre Aussage wird. Der einzige Unterschied zwischen Bestimmungsgleichungen und -ungleichungen besteht darin, daß bei letzteren an der Stelle des Gleichheitszeichens eine der Relationen $>, \geq, \leq, <, \neq$ steht.

Beispiel 8.1:
a) Die Lösungsmenge der Ungleichung $2x \geq 8$ mit x als Unbekannter ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich 4 sind, also das Intervall $[4, \infty)$.
b) Die Lösungsmenge der Ungleichung $x + 1 < 0$ mit x als Unbekannter ist die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner als -1 sind, also das Intervall $(-\infty, -1)$.

Auch für Ungleichungen existieren Umformungen, die es ermöglichen, eine Ungleichung in eine andere Ungleichung mit derselben Lösungsmenge zu überführen, und die somit wie die im vorangegangenen Kapitel behandelten Äquivalenzumformungen für Gleichungen sehr nützlich dafür sind, die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen, indem mit ihrer Hilfe die Ungleichung nach der Unbekannten aufgelöst wird. Die wichtigsten dieser Umformungen sind nachfolgend für $a, b, c \in \mathbb{R}$ zusammengestellt:

$$\begin{array}{rcl} a < (\leq)\, b & \Rightarrow & b > (\geq)\, a \\ a < (\leq)\, b & \Rightarrow & a + c < (\leq)\, b + c \\ a < (\leq)\, b \,\wedge\, c > 0 & \Rightarrow & ca < (\leq)\, cb \\ a < (\leq)\, b \,\wedge\, c < 0 & \Rightarrow & ca > (\geq)\, cb \end{array}$$

Man beachte, daß die Multiplikation einer Ungleichung mit einem Faktor $c \in \mathbb{R}$, dessen Vorzeichen nicht bekannt ist, eine **Fallunterscheidung** für $c > 0$ und $c < 0$ erforderlich macht.

Um die Lösungsmenge L_U einer Ungleichung der Form $a \neq b$ mit a und b als beliebige Terme, die eine unbekannte Variable enthalten, zu bestimmen, empfiehlt es sich, zunächst die Lösungsmenge L_G der Gleichung $a = b$ zu ermitteln. Es gilt dann $L_U = (L_G)^C$.

Beispiel 8.2:
a) Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 5 \geq 6x - (2x + 3)$ mit x als Unbekannter ist, wie die Kette

$$\begin{array}{ll}
3x - 5 \geq 6x - (2x + 3) & |\,\text{Auflösen der Klammer} \\
3x - 5 \geq 6x - 2x - 3 & |\,\text{Zusammenfassen der } x\text{-Glieder} \\
3x - 5 \geq 4x - 3 & |\,+3 \\
3x - 2 \geq 4x & |\,-3x \\
\quad -2 \geq x & |\,\text{Ungleichung aufgelöst}
\end{array}$$

von Umformungen erbringt, das Intervall $(-\infty, -2]$.
b) Um die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{5}{x} \leq 1$ mit x als Unbekannter, an welche zusätzlich die Forderung $x \neq 0$ erhoben wird, zu bestimmen, wird zunächst der Fall $x > 0$ betrachtet. Die Multiplikation der Ungleichung mit x führt dann auf die Ungleichung $5 \leq x$. Also ist die Lösungsmenge der urpsrünglichen Ungleichung für $x > 0$ das Intervall $L_1 = [5, \infty)$. Für den Fall $x < 0$ führt die Multiplikation der Ungleichung mit x hingegen auf die Ungleichung $5 \geq x$. Die Lösungsmenge der urpsrünglichen Ungleichung ist folglich für $x < 0$ das Intervall $L_2 = (-\infty, 0)$, und die gesamte Lösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2$.

8.2. Lösung nichtlinearer Ungleichungen

Es existieren Arten von Ungleichungen, welche mit dem im vorangegangenen Abschnitt behandelten Instrumentarium allein nicht gelöst werden können. In diesem Abschnitt werden nun für einige solcher Ungleichungen Lösungsverfahren vorgestellt.

Eine Ungleichung der Form

$$|a| < b, \quad |a| \leq b, \quad |a| > b \quad |a| \geq b \quad \text{oder} \quad |a| \neq b$$

mit a und b als beliebige Terme, die eine unbekannte Variable enthalten, heißt **Ungleichung mit Absolutbetrag**. Ist die Lösungsmenge einer solchen Ungleichung zu bestimmen, sind die nachfolgenden Äquivalenzen sehr hilfreich:

$$\begin{array}{lllll}
1. & |a| < b & \Leftrightarrow & a < b \wedge -a < b \\
2. & |a| \leq b & \Leftrightarrow & a \leq b \wedge -a \leq b \\
3. & |a| > b & \Leftrightarrow & a > b \vee -a > b \\
4. & |a| \geq b & \Leftrightarrow & a \geq b \vee -a \geq b \\
5. & |a| \neq b & \Leftrightarrow & a \neq b \wedge -a \neq b
\end{array}$$

Diese Äquivalenzen besagen, daß man, um die Lösungsmenge L einer Ungleichung mit Absolutbetrag zu bestimmen, die Lösungsmengen L_1 und L_2 zweier geeignet gewählter Ungleichungen ohne Absolutbetrag bestimmen kann, und dann in den Fällen 1, 2 und 5 über die Beziehung $L = L_1 \cap L_2$ und in den Fällen 3 und 4 über die Beziehung $L = L_1 \cup L_2$ die Lösungsmenge der Ungleichung mit Absolutbetrag erhält.

Beispiel 8.3:
a) Die Ungleichung $x \leq |5-x|$ ist (nach 4.) äquivalent zu

$$\underbrace{x \leq 5-x}_{U_1:=} \vee \underbrace{x \leq -(5-x)}_{U_2:=}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung U_1 ist, wie die Kette

$$\begin{array}{rl} x \leq 5-x & |+x \\ 2x \leq 5 & |:2 \\ x \leq 5/2 & |\,\text{Ungleichung aufgelöst} \end{array}$$

von Äquivalenzumformungen erbringt, $L_1 = (-\infty, 5/2]$. Die Lösungsmenge der Ungleichung U_2 ist, wie die Kette

$$\begin{array}{ll} x \leq -(5-x) & |\,\text{Klammer auflösen} \\ x \leq -5+x & |-x \\ 0 \leq -5 & |\,\text{Falsche Aussage} \end{array}$$

von Äquivalenzumformungen erbringt, $L_2 = \emptyset$. Die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung ist also $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/2]$.
b) Die Ungleichung $|6-x| < 8$ ist (nach 1.) äquivalent zu

$$\underbrace{6-x<8}_{U_1:=} \wedge \underbrace{-(6-x)<8}_{U_2:=}.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung U_1 ist, wie man leicht nachrechnet, das offene Interval $L_1 = (-2, \infty)$, die Lösungsmenge der Ungleichung U_2 das offene Intervall $L_2 = (-\infty, 14)$. Die Lösungsmenge der ursprünglichen Ungleichung ist also $L = L_1 \cap L_2 = (-2, 14)$.

9. Gleichungssysteme

In den Kapiteln 7 wurde erläutert, wie für Bestimmungsgleichungen mit einer Unbekannten die sogenannte Lösungsmenge ermittelt werden kann. In diesem Kapitel wird nun die Beschränkung, daß eine Gleichung bzw. Ungleichung nur eine Unbekannte haben kann, fallen gelassen, und der darauf aufbauende Begriff des Gleichungssystems behandelt.

9.1. Grundbegriffe

Auch Bestimmungsgleichungen mit $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten sind Aussageformen, haben allerdings im Gegensatz zu Bestimmungsgleichungen mit nur einer Unbekannten nicht die Menge $\mathbb{R}$ sondern die Menge $\mathbb{R}^n$ zur Grundmenge. Infolgedessen sind bei der Bestimmung ihrer Lösungsmenge nicht nur reelle Zahlen, sondern n-Tupel reeller Zahlen zu untersuchen. Wir werden an dieser Stelle nur Systeme mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten behandeln. Andere (lineare) Systeme werden innerhalb der linearen Algebra behandelt.

Beispiel 9.1:
a) Die Bestimmungsgleichung $4x_1 + 2x_2 = 6$ mit x_1 und x_2 als Unbekannten hat, wie man etwa durch einsetzen leicht nachprüft, die Menge $\{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = 3 - 2x_1\}$ als Lösungsmenge.
b) Die Lösungsmenge der Bestimmungsungleichung $x_1x_2 > 0$ mit x_1 und x_2 als Unbekannten enthält all jene Tupel (x_1, x_2) für die gilt, daß x_1 und x_2 beide ungleich Null sind und das gleiche Vorzeichen haben.

Beispiel 9.2: Die beiden Gleichungen $x_1 + x_2 = 0$ und $x_1 - x_2 = 0$ bilden gemeinsam ein Gleichungssystem. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist $L_1 = \{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = -x_1\}$, die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist $L_2 = \{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 = x_1\}$. Folglich ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = L_1 \cap L_2 = \{(0, 0)\}$.

Selbstverständlich können auch Systeme auftreten, die sowohl Gleichungen als auch Ungleichungen enthalten. Das oben gesagte gilt für deartige Systeme analog. Wir behandeln hier nur lineare Gleichungssysteme.

9.2. Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssysteme, deren Einzelgleichungen alle in jeder Unbekannten linear sind, heißen **lineare Gleichungssyteme**. Derartige Gleichungssysteme treten sehr häufig auf und sind aufgrund ihrer einfachen Struktur sehr leicht lösbar. Dabei gilt grundsätzlich, daß ein lineares Gleichungssystem entweder keine, genau eine oder aber unendlich viele Lösungen hat.

Die bekannteste Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist das **Einsetzungsverfahren**. Dabei wird eine beliebige Gleichung G nach einer beliebigen Unbekannten x_i aufgelöst, und eben diese Unbekannte in allen anderen Gleichungen durch den Term ersetzt, welcher nach dem Auflösen der Gleichung G auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens steht. Auf diesem Weg ergibt sich ein neues, um eine Gleichung und um eine Unbekannte reduziertes Gleichungssystem. Ist nun die Lösungsmenge dieses vereinfachten Gleichungssystems bestimmbar, lassen sich über die nach x_i aufgelöste Gleichung G auch alle erlaubten Werte von x_i und somit die Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems ermitteln. Ist die Lösungsmenge des vereinfachten Gleichungssystems hingegen noch nicht bestimmbar, läßt sich das bereits vereinfachte Gleichungssystem wie eben beschrieben erneut vereinfachen, usw. Die wiederholte Anwendung solcher Vereinfachungen bildet insgesamt das Einsetzungsverfahren.

Beispiel 9.3:
a) Um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\underbrace{2x + 3y = 14}_{G_1:=} \quad \text{und} \quad \underbrace{4x - y = 0}_{G_2:=}$$

mit x und y als Unbekannten zu bestimmen, kann man zunächst G_2 nach y auflösen und erhält dann $y = 4x$. Ersetzt man nun in G_1 die Unbekannte y durch $4x$, ergibt sich die Gleichung $2x + 3(4x) = 14$. Die Lösung dieser Gleichung ist offensichtlich $x = 1$. Mit $y = 4x$ folgt $y = 4$. Die Lösungsmenge des betrachteten Gleichungssystems ist also $\{(1, 4)\}$.
b) Um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} G_1:&\quad x + 2y + z = 2 \\ G_2:&\; -x + 2y + z = 0 \\ G_3:&\qquad\quad 4x - y = 10 \end{aligned}$$

mit x,y und z als Unbekannten zu bestimmen, kann man zunächst die Gleichung G_3 nach y auflösen und erhält dann $y = 4x - 10$. Ersetzt man nun in G_1 und G_2 die Unbekannte y durch $4x - 10$, ergibt sich das vereinfachte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} G_4:&\quad x + 2(4x - 10) + z = 2 \\ G_5:&\; -x + 2(4x - 10) + z = 0. \end{aligned}$$

Gleichung G_5 nach z aufgelöst entspricht $z = 20 - 7x$. Ersetzt man nun in G_4 die Unbekannte z durch $20 - 7x$, ergibt sich die Gleichung $x + 2(4x - 10) + (20 - 7x) = 2$. Es folgt $x = 1$, und mit $y = 4x - 10$ bzw. $z = 20 - 7x$ darüberhinaus $y = -6$ und $z = 13$. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also $\{(1, -6, 13)\}$.
c) Um die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\underbrace{x + 2y = 3}_{G_1:=} \quad \text{und} \quad \underbrace{2x + 4y - 4 = 0}_{G_2:=}$$

zu bestimmen, kann man zunächst G_1 nach x auflösen und erhält dann $x = 3 - 2y$. Ersetzt man nun in G_2 die Unbekannte x durch $3 - 2y$, ergibt sich die Gleichung $2(3 - 2y) + 4y - 4 = 0$. Diese Gleichung hat wegen $2 \neq 0$ keine Lösung. Die Lösungsmenge des betrachteten Gleichungssystems ist also die leere Menge.

10. Grundzüge der Linearen Algebra

In diesem Kapitel werden grundlegende Konzepte der Linearen Algebra wiederholt, insbesondere das des Vektors und der Matrix.

10.1. Grundbegriffe

Ein **Vektor** ist ein Tupel $x \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl n heißt dabei auch **Dimension** des Vektors. Anders als bei Tupeln üblich werden die einzelnen Komponenten eines Vektors nicht horizontal und durch Kommata getrennt aufgelistet, sondern vertikal.

Vektoren werden üblicherweise mit kleinen lateinischen Buchstaben, ihre einzelnen Komponenten durch denselben Buchstaben gefolgt von einer tiefgestellten Dimensionsangabe bezeichnet. So bezeichnen x_1, x_2 und x_3 die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^3$, es gilt also

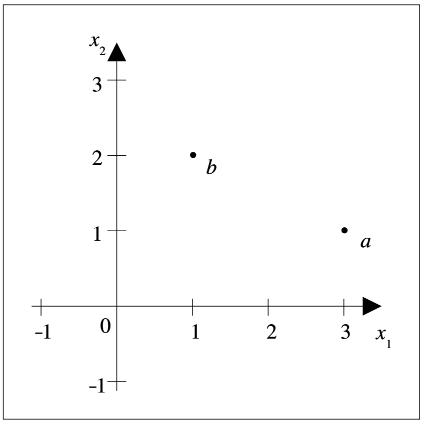
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor kann sowohl als **Punkt** als auch als **Richtung** interpretiert werden, wobei jede Komponente des Vektors mit einer Dimension eines n-dimensionalen euklidischen Raums assoziiert wird und im Fall der Punktinterpretation eine absolute Koordinate und im Fall der Richtungsinterpretation eine relative Verschiebung in dieser Dimension angibt.

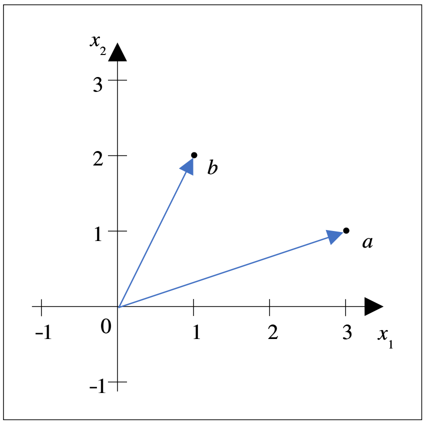
Beispiel 10.1: Die Punkt- und die Richtungsinterpretationen der Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ werden in Abbildung 10.1 veranschaulicht. Dabei sind die durch a und b beschriebenen Richtungen (wie üblich) ausgehend vom Ursprung dargestellt.

Spezielle Vektoren sind der **Nullvektor**, dessen Komponenten alle gleich Null sind und der mit dem Symbol 0 bezeichnet wird, und die sogenannten **Einheitsvektoren**. Dabei ist für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ der i-te Einheitsvektor e_i genau derjenige Vektor, dessen i-te Komponente gleich Eins und dessen andere Komponenten gleich Null sind.[1]

[1] Strenggenommen muß bei der Spezifikation von Null- und Einheitsvektoren immer angegeben werden, welche Dimension dieser Vektor hat. Dieses wird jedoch in der Regel aus dem Kontext deutlich und daher im Regelfall nicht expliziert.



(a)



(b)

Eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $n, m \in \mathbb{N}$ heißt **Matrix** mit n Zeilen und m Spalten oder auch $n \times m$-Matrix (sprich: n Kreuz m Matrix). Die a_{ij} heißen **Elemente** oder **Komponenten** der Matrix. Dabei fungieren $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$ als Zeilen- bzw. Spaltenindex. Verkürzend schreibt man für die oben angegebene Matrix auch (a_{ij}), $(a_{ij})_{n \times m}$ oder auch nur A. Eine Matrix, die die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten hat, heißt auch **quadratische Matrix**.

Eine spezielle Matrix ist die **Nullmatrix**, deren Elemente alle gleich Null sind und die mit dem Symbol 0 bezeichnet wird. Eine spezielle quadratische Matrix ist die **Einheits- oder Identitätsmatrix** $I = (e_{ij})_{n \times n}$, welche dadurch gekennzeichnet ist, daß alle ihre Elemente e_{ij} mit $i \neq j$ gleich Null und alle ihre Elemente e_{ij} mit $i = j$ gleich Eins sind.

Beispiel 10.2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist eine 2×3-Matrix,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die 2×2-Nullmatrix und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die 2×2-Einheitsmatrix.

Zu jeder Matrix $A = (a_{ij})_{n\times m}$ existiert eine sogenannte **transponierte** Matrix $B = (b_{ij})_{m\times n}$ mit $a_{ij} = b_{ji}$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$. Diese Matrix entsteht also anschaulich dadurch, daß man alle Elemente der Ausgangsmatrix A an der Hauptdiagonalen spiegelt, und wird üblicherweise als $A^\top$ (sprich: A transponiert) bezeichnet.

Beispiel 10.3: Die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

gehörende transponierte Matrix ist

$$A^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt für jede beliebige Matrix A die Beziehung $\left(A^\top\right)^\top = A$.

10.2. Verknüpfung von Matrizen und Vektoren

Auch für Vektoren und Matrizen sind eine Vielzahl von Verknüpfungen definiert, welche alle auf den vier Grundrechenarten aufbauen. Da man Vektoren als spezielle Matrizen, deren zweite Dimension gleich Eins ist, auffassen kann, werden nachfolgend die eben erwähnten Verknüpfungen lediglich für Matrizen angegeben; die entsprechenden Verknüpfungen von Vektoren ergeben sich daraus unmittelbar.

Für die **Addition** $A + B$ zweier Matrizen $A = (a_{ij})_{n\times m}$ und $B = (b_{ij})_{n\times m}$, die zwingend die gleiche Anzahl n an Zeilen und m an Spalten aufweisen müssen, zu einer Matrix $C = (c_{ij})_{n\times m}$ gilt für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Zwei Matrizen und damit auch zwei Vektoren werden also komponentenweise addiert.

Für die sogenannte **Skalarmultiplikation** αA einer Matrix $A = (a_{ij})_{n\times m}$ mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $C = (c_{ij})_{n\times m}$ als Produktmatrix für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ gilt

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Eine Matrix bzw. ein Vektor wird also mit einem Skalar multipliziert, indem jede Komponente mit eben diesem Skalar multipliziert wird.

Offensichtlich gelten sowohl für die Addition von Matrizen als auch für die Skalarmultiplikation sowohl das Kommutativ- und das Distributiv- als auch das Assoziativgesetz.

Beispiel 10.4:
a) Nachfolgend ist ein Beispiel für die Addition von Matrizen angegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) Nachfolgend ist eine Beispiel für die Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar angegeben:

$$3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 6 & 15 & 21 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Eine Verknüpfung, die ausschließlich für Vektoren definiert ist, stellt das **Skalarprodukt** dar. Es ist für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit der gleichen Dimension n definiert als

$$a \cdot b = ab := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

also als die Summe über die Produkte der sich entsprechenden Komponenten der beiden Vektoren. Offensichtlich ist auch die Bildung des Skalarprodukts kommutativ.

Mit Hilfe des Skalarprodukts läßt sich der Begriff der **Norm** eines Vektors einführen, welche die Länge dieses Vektors im euklidischen Sinn angibt. Sie wird für einen Vektor $x \in \mathbb{R}$ durch das Symbol $||x||$ beschrieben und ist definiert als

$$||x|| := \sqrt{xx} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Beispiel 10.5:
a) Das Skalarprodukt der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 33$.

b) Die Länge des Vektors $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $||x|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

Als letzte Verknüpfung sei an dieser Stelle noch die **Multiplikation von Matrizen** angeführt. Sie führt für eine Matrix $A = (a_{ij})_{n \times m}$ als erstem Faktor und $B = (b_{ij})_{m \times p}$ als zweitem Faktor zu einer Produktmatrix $C = (c_{ij})_{n \times p}$; es gilt dabei, daß die Spaltenzahl der ersten Faktormatrix und die Zeilenzahl der zweiten Faktormatrix zwingend übereinstimmen müssen, und daß die Produktmatrix so viele Zeilen wie die erste Faktormatrix und so viele Spalten wie die zweite Faktormatrix aufweist. Auf Komponentenebene ist dabei für alle $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, p$

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Am zweckmäßigsten ist, die Multiplikation zweier Matrizen nach dem sogenannten **Falkschen Schema** vorzunehmen, welches nachfolgend für $C = AB$ abgebildet ist:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{h1} & b_{h2} & \cdots & \mathbf{b_{hj}} & \cdots & b_{hp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \mathbf{b_{mj}} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{il}} & \cdots & \mathbf{a_{im}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \mathbf{c_{ij}} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

In diesem Schema schreibt man die erste Faktormatrix A nach links unten und die zweite Faktormatrix B nach rechts oben. Jedes Element c_{ij} der Produktmatrix, welche innerhalb dieses Schemas rechts unten angesiedelt ist, ergibt sich, indem man das ganz links stehende Element der i-ten Zeile von A mit dem ganz oben stehenden Element der j-ten Spalte von B multipliziert, anschließend das zweite Element von links der i-ten Zeile von A mit dem am zweitobersten stehenden Element der j-ten Spalte von B multipliziert, usw., und schließlich die Summe der auf diese Weise bestimmten Produkte bildet.

Beispiel 10.6: Das nachfolgende Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 12 & 18 & 29 \\ 9 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

hat im Falkschen Schema die folgende Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 12 & 18 & 29 \\ 9 & 12 & 19 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann auch sie folgt vorgegangen werden. Jede Matrix kann auch als Aneinanderreihung von Vektoren (entweder Spaltenvektoren nebeneinander oder Zeilenvektoren untereinander). Gegeben seien zwei Matrizen A und B. Wir bilden das Produkt $A \cdot B = C$ folgendermaßen. Das Element in der ersten Zeile und ersten Spalte der Matrix C ist gleich dem Skalarprodukt der ersten Zeile von A und der ersten Spalte von B. Allgemein ist das c_{ij} Element von C gleich dem Skalarprodukt der i-ten Spalte von A mit der j-ten Zeile von B. Das Schema wird durch die folgende Graphik verdeutlicht.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix}$$

$$4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 42$$

Beispiel 10.7: Berechnen sie die restlichen Element der Produktmatrix C.

Dieser Ansatz verdeutlicht auch warum die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B sein muss (Warum?) und warum im Allgemeinen $AB \neq BA$.

Man beachte, daß für die Matrizenmultiplikation zwar das Assoziativ- und das Distributivgesetzt gelten, nicht aber das Kommutativgesetz. Es gilt also allgemein für Matrizen A, B und C mit geeigneter Zeilen- und Spaltenzahl:

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ A(B+C) &= AB + AC \end{aligned}$$

Desweiteren gilt für die Multiplikation einer quadratischen Matrix A mit der geeigneten Einheitsmatrix I

$$AI = IA = A.$$

A. Übungsaufgaben

Arithmetik

Aufgabe 1.1: Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie gegebenenfalls zusammen.

a) $d - 2e - (f - 2g)$ **b)** $5e + 3x + (3x - 4e)$
c) $g + (2f - (g + 2f))$ **d)** $a + b - (2a - (b + a) - b)$

Aufgabe 1.2: Multiplizieren Sie aus:

a) $-x(u + v)$ **b)** $(4x - 0,5y)(-2u)$
c) $(2a - 3b)(4c - 5d)$ **d)** $(4x - 2y)(3u + 2v)(a + b + c)$

Aufgabe 1.3: Klammern Sie weitmöglichst aus:

a) $49xz - 14xu + 21xy$ **b)** $6ac - 12abc + 36acg - 18acx$
c) $ax + 2ay + 2bx + 4by$ **d)** $2ab - 2bc + 2au - 2av - 2cu + 2cv$

Aufgabe 1.4: Bestimmen Sie unter Verwendung einer der Binomischen Formeln:

a) $(5x - 2z)^2$ **b)** $(a - b)^2 + (b - a)^2$

Aufgabe 1.5: Schreiben Sie unter Verwendung von Binomen um:

a) $25x^2 - 20xy + 4y^2$ **b)** $49x^2 - 25y^2$

Aufgabe 1.6: Schreiben Sie als Dezimalbruch:

a) $9/16$ **b)** $11/15$ **c)** $5/9$

Aufgabe 1.7: Kürzen Sie:

a) $\frac{14}{49}$ **b)** $\frac{12uvwx}{3vwxy}$ **c)** $\frac{128axz}{96ayz}$
d) $\frac{6abc-3ax}{15ac-12ax}$ **e)** $\frac{25abcd-15abu+30ab}{20abz-30abx}$ **f)** $\frac{14a-21b}{15b-10a}$
g) $\frac{4a^2-20ac+25c^2}{2ab-5bc}$ **h)** $\frac{25u^2-49v^2}{25u^2-70uv+49v^2}$

Aufgabe 1.8: Addieren Sie:

a) $\frac{5}{28} + \frac{3}{8} + \frac{9}{35}$ **b)** $\frac{x-y}{xy} + \frac{x+z}{xz} - \frac{y-z}{yz}$
c) $\frac{3u-12v^2}{u^2-14uv+49v^2} - \frac{6}{2u-14v}$

Aufgabe 1.9: Berechnen Sie:

a) $\frac{8}{65} : \frac{14}{39}$ **b)** $\frac{a^2-4b^2}{14a^2} : \frac{2a+4b}{7a}$

Aufgabe 1.10: Vereinfachen Sie:

a) $\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ **b)** $\frac{\frac{u}{v}-1}{1-\frac{1}{v}}$

Aufgabe 1.11: Fassen Sie zusammen:

a) $x^{n-2}x^{2n+5}x^{m-3}$ **b)** $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{x^4y^{-2}z^3}{a^3b}\right)^2$

Aufgabe 1.12: Schreiben Sie mit gebrochenem Exponenten:

a) $\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt[3]{x^4}$ **c)** $\sqrt[5]{x^{15}}$
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ **e)** $\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^2}}$

Aufgabe 1.13: Schreiben Sie unter Verwendung von Wurzeln:

a) $x^{0,5}$ **b)** $x^{\frac{4}{5}}$
c) $x^{0,1}$ **d)** $x^{\frac{-2}{3}}$

Aufgabe 1.14: Vereinfachen Sie so, daß im Nenner keine Wurzel steht:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Aufgabe 1.15: Kürzen Sie:

a) $\frac{4x^6y^7z^{12}}{12x^5y^8z^{13}}$ **b)** $\frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^3}}$

Aufgabe 1.16: Schreiben Sie als Logarithmus:

a) $2^3 = 8$ **b)** $a^{0,5} = c$
c) $3^x = 3$ **d)** $e^x = 1$

Aufgabe 1.17: Bestimmen Sie:

a) $\log 0,1$ **b)** $\log 100$
c) $\ln e$ **d)** $\ln e^2$

Aufgabe 1.18: Berechnen Sie x aus:

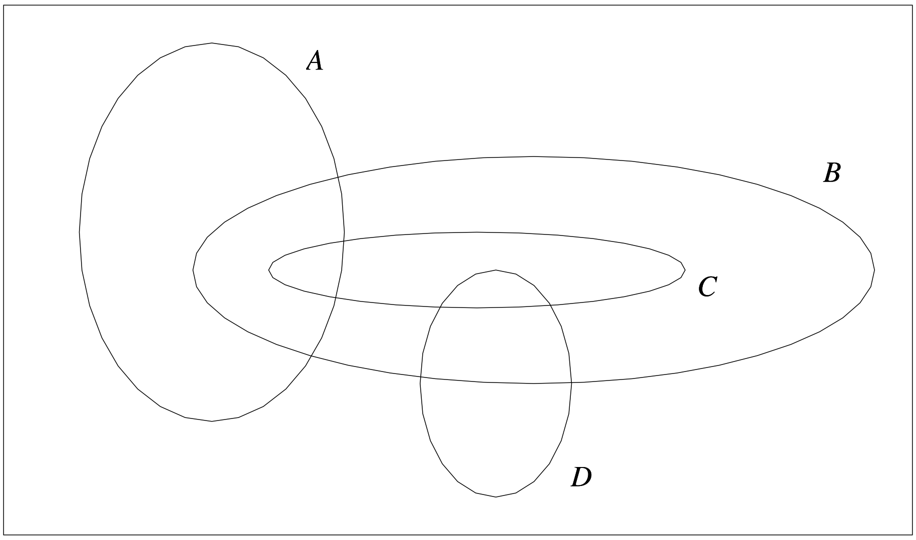
a) $2\log x = \log 125 - \log 5$ **b)** $\log x = \frac{1}{2}(\log 24 + \log 8 - \log 3)$
c) $\log x = \log_2 8$

Aufgabe 1.19: Untersuchen Sie, welche der folgenden Ausdrücke gleich sind:

a) $\log\left(\prod_{i=1}^n a_i^{b_i}\right)$ **b)** $\log\left(\prod_{i=1}^n a_ib_i\right)$
c) $\sum_{i=1}^n b_i \log a_i$ **d)** $n\log a + n\log b$
e) $\sum_{i=1}^n \log a_i + \sum_{i=1}^n \log b_i$ **f)** $\log(a^nb^n)$
g) $n\log a$ **h)** $n\log a_i + n\log b_i$

Grundzüge der Mengenlehre

Aufgabe 1.1: Gegeben seien die Mengen A, B, C und D gemäß folgendem Venn-Diagramm:



Bestimmen Sie in diesem Diagramm die Mengen:

a) $(A \cap B) \setminus C$ **b)** $B \setminus (A \cup C \cup D)$

Aufgabe 1.2: Gegeben seien die Mengen $A := \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B := \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C := \{0\}$ und $D := \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Bilden Sie die folgenden Mengen:

a) $\left((A \cap B) \cup C^C\right) \setminus B$ **b)** $D \setminus (D \cap (A \cup B))$

Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen:

c) $C \subset B \subset D$ **d)** $\{0\} \in D$ **e)** $0 \in D$

Aufgabe 1.3: Gegeben seien die Mengen $A := \{3, 4, 5, \ldots, 12\}$ und $B := \{3, 5, 7, \ldots, 25\}$.

a) Wieviele Elemente besitzt $A \times B$?
b) Für wieviele Elemente $(i, j) \in A \times B$ gilt $i \neq j$?

Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen?

c) $(5, 3) \in A \times B$ **d)** $(7, 5) \in A \times B$ **e)** $(17, 11) \in A \times B$

Aufgabe 1.4: Stellen Sie die Mengen $A := \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$, $B := \{(x, x - 1) | x \in \mathbb{R}\}$ und $C := \{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$ in der euklidischen Ebene graphisch dar. Welche Punkte enthält $A \cap C$?

Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 2.1: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = a + bx$. Stellen Sie aufgrund einer geeigneten Wertetabelle die Funktion für die folgenden Werte von a und b graphisch dar.

a) $a = 2,\ b = 0,5$
b) $a = 0,\ b = 0,5$
c) $a = -1,\ b = 0,5$
d) $a = 2,\ b = -0,5$

Aufgabe 2.2: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = a + b(x - c)^2$. Stellen Sie aufgrund einer geeigneten Wertetabelle die Funktion für die folgenden Werte von a, b und c graphisch dar.

a) $a = 2,\ b = 1,\ c = 0$
b) $a = 2,\ b = 1,\ c = 2$
c) $a = 2,\ b = 2,\ c = 0$
d) $a = 2,\ b = -1,\ c = 0$
e) $a = 0,\ b = 1,\ c = 0$
f) $a = -1,\ b = 1,\ c = 0$

Aufgabe 2.3: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = ab^{cx}$. Stellen Sie aufgrund einer geeigneten Wertetabelle die Funktion für die folgenden Werte von a, b und c graphisch dar.

a) $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$
b) $a = 1,\ b = 2,\ c = -1$
c) $a = 1,\ b = 3,\ c = 1$
d) $a = -1,\ b = 2,\ c = 1$

Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 3.1: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^{13}$
b) $f(x) = 7x^6$
c) $f(x) = x^{0,25}$
d) $f(x) = x^{-4}$
e) $f(x) = 4x^{-0,25}$
f) $f(x) = 4$
g) $f(w) = 3w^{-1}$
h) $f(w) = a^2$
i) $f(x) = \sqrt{x^3}$
j) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

Aufgabe 3.2: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = 2^x$
c) $f(x) = \ln x$
d) $f(x) = \log_{10} x$

Aufgabe 3.3: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$
b) $f(x) = 2x^2 + 4\ln x + 5e^x$
c) $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$
d) $f(x) = ax^3bx^2cxd$
e) $f(x) = abcdx^6$
f) $f(x) = ax^2 + b^3 - x^2e^x$

Aufgabe 3.4: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (x^2 - 1)(4 + 2x)$
b) $f(x) = (ax - b)(cx^2)$
c) $f(x) = (2 - 3x)(1 + x)(x + 2)$
d) $f(x) = x^2(4x + 6)$
e) $f(x) = (x^2 + 3)x^{-1}$

Aufgabe 3.5: Bilden Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{4x}{x+5}$
c) $f(x) = \frac{x+7}{x}$ **d)** $f(x) = \frac{ax^2+b}{cx+d}$

Aufgabe 3.6: Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) := ax + b$ die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

a) $f(x)$ **b)** $xf(x)$
c) $\frac{1}{f(x)}$ **d)** $\frac{f(x)}{x}$

Aufgabe 3.7: Bilden Sie unter Verwendung der Kettenregel die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x^3 - x^2 + 2)^4$ **b)** $f(x) = \left(2x^3 - x(x^3+4)^3\right)^2$
c) $f(x) = x\sqrt{ax^2 - 1}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
e) $f(x) = e^{ax}$ **f)** $f(x) = \ln\left(x^2 - x + 1\right)$
g) $f(x) = xe^{(ax)^2}$ **h)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$
i) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **j)** $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$
k) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **l)** $f(x) = \ln \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2$
m) $f(x) = \frac{a}{x^2(\ln x)^3}$ **n)** $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
o) $f(x) = \ln(\ln x)$ **p)** $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+(a+x^3)^2}}$

Gleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 4.1: Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:

a) $\frac{4}{5}x - \left(\frac{2}{3}x + 5\right) = \frac{4}{6}x + 3$ **b)** $\frac{x+4}{x-1} = \frac{x+1}{x+2}$

Aufgabe 4.2: Lösen Sie die folgenden Gleichungen auf:

a) $\sqrt{x} - 3 = 5$ **b)** $-2 = \sqrt{2x}$ **c)** $\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-3}$

Aufgabe 4.3: Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a) $\frac{2}{x^3} = 54$ **b)** $5^x = 20$
c) $2x^2 - 2x = 4$ **d)** $x^2 - 6x + 9 = 0$
e) $4x^2 - 2x + 4 = 0$ **f)** $-3x^4 + 3x^2 = -6$
g) $-2x^4 + 10x^2 - 8 = 0$ **h)** $x^7 - 2x^6 - 8x^5 = 0$
i) $4x^{10} - 24x^9 + 36x^8 = 0$ **j)** $x^6 - 7x^5 = 0$
k) $4x^2 - 36 = 0$ **l)** $3x^2 + 15x = 18$
m) $45x^2 + 15x^2 - 30x = 0$ **n)** $x^3 + 8 = 0$
o) $x^2 + x + 1 = 0$

Ungleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 5.1: Formen Sie die Ungleichung

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}y \leq \frac{2}{3}$$

so um, daß x isoliert auf einer Seite steht.

Aufgabe 5.2: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $\frac{21+x}{2x} + 1 < 5$
b) $\frac{2-x}{4+x} - 5 < 0$
c) $\frac{16x}{x^2+15/4} > 4$
d) $x^2 + |x^3 - x - 2| < 0$
e) $\frac{5x+1}{x^2+1} > \frac{5}{x}$
f) $\frac{3x+2}{x^2+1} < 2$
g) $\frac{3-x}{-2} > 1$
h) $\frac{x+2}{x-2} < 2$
i) $\frac{x-2}{x-1} < \frac{x+1}{x+2}$
j) $\frac{x+3}{x} < 2$
k) $\frac{2+x^2}{x^2} < -4$
l) $x^4 - x^3 - 2x^2 > 0$

Aufgabe 5.3: Schreiben Sie als Intervall:

a) $\{x \,|\, |x-4| \leq 2\}$
b) $\{x \,|\, |x-4| \leq 1\}$
c) $\{x \,|\, x > 2 \wedge x \leq 3\}$
d) $\{x \,|\, |x+1| < 1\}$

Gleichungssysteme

Aufgabe 6.1: Bestimmen Sie analytisch die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme:

a) $x + 2y = 4 \wedge 4x + 10y = 0$
b) $5x - 4y = 3 \wedge 2x + y = 1$
c) $8x + 2y = 10 \wedge x - y = 5$
d) $2x + y = 3 \wedge 10x + 5y - 10 = 0$

Grundzüge der Lineare Algebra

Aufgabe 7.1: Addieren Sie algebraisch und graphisch die folgenden Vektoren:

a) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$
d) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.2: Multiplizieren Sie $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ algebraisch und graphisch mit:

a) $\alpha = 2$
b) $\alpha = 0,5$
c) $\alpha = -1$
d) $\alpha = 1$

Aufgabe 7.3: Multiplizieren Sie $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit:

a) $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $y = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $y = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

e) $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Welche Regelmäßigkeit fällt Ihnen auf?

Aufgabe 7.4: Berechnen Sie die Länge von

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **c)** $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.5: Bestimmen Sie die folgenden Matrizenprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

B. Lösungen zu den Übungsaufgaben

Arithmetik

Aufgabe 8.1:

a) $d - 2e - f + 2g$

b) $e + 6x$

c) 0

d) $3b$

Aufgabe 8.2:

a) $-xu - xv$

b) $uy - 8xu$

c) $8ac - 12bc - 10ad + 15bd$

d) $12aux - 6auy + 8avx - 4avy + 12bux - 6buy + 8bvx - 4bvy + 12cux - 6cuy + 8cvx - 4cvy$

Aufgabe 8.3:

a) $7x(7z - 2u + 3y)$

b) $6ac(1 - 2b + 6g - 3x)$

c) $(x + 2y)(a + 2b)$

d) $2(a - c)(b + u - v)$

Aufgabe 8.4:

a) $25x^2 - 20xz + 4z^2$ **b)** $2(a^2 - 2ab + b^2)$

Aufgabe 8.5:

a) $(5x - 2y)^2$ **b)** $(7x - 5y)(7x + 5y)$

Aufgabe 8.6:

a) $0,5625$ **b)** $0,7333\ldots$ **c)** $0,555\ldots$

Aufgabe 8.7:

a) $\frac{2}{7}$ **b)** $\frac{4u}{y}$ **c)** $\frac{4x}{3y}$
d) $\frac{2bc-x}{5c-4x}$ **e)** $\frac{5cd-3u+6}{4z-6x}$ **f)** $-\frac{7}{5}$
g) $\frac{2a-5c}{b}$ **h)** $\frac{5u+7v}{5u-7v}$

Aufgabe 8.8:

a) $\frac{227}{280}$ **b)** $\frac{2}{y}$ **c)** $\frac{-12v^2+21v}{(u-7v)^2}$

Aufgabe 8.9:

a) $\frac{12}{35}$ **b)** $\frac{a-2b}{4a}$

Aufgabe 8.10:

a) $b - a$ **b)** $\frac{u-v}{v-1}$

Aufgabe 8.11:

a) x^{3n+m} **b)** x^6 **c)** $\frac{x^8y^{-4}z^6}{a^6b^2}$

Aufgabe 8.12:

a) $x^{\frac{1}{2}}$ **b)** $x^{\frac{4}{3}}$ **c)** x^3
d) $x^{-\frac{1}{3}}$ **e)** $x^{\frac{1}{10}}$

Aufgabe 8.13:

a) $\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt[5]{x^4}$
c) $\sqrt[10]{x}$ **d)** $\sqrt[3]{x^{-2}}$

Aufgabe 8.14:

$$-(5 + 2\sqrt{6})$$

Aufgabe 8.15:

a) $\frac{x}{3yz}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[12]{x^5}\,\sqrt[10]{y^{11}}}$

Aufgabe 8.16:

a) $\log_2 8 = 3$ **b)** $\log_a c = 0,5$
c) $\log_3 3 = x$ **d)** $\ln 1 = x$

Aufgabe 8.17:

a) -1 **b)** 2
c) 1 **d)** 2

Aufgabe 8.18:

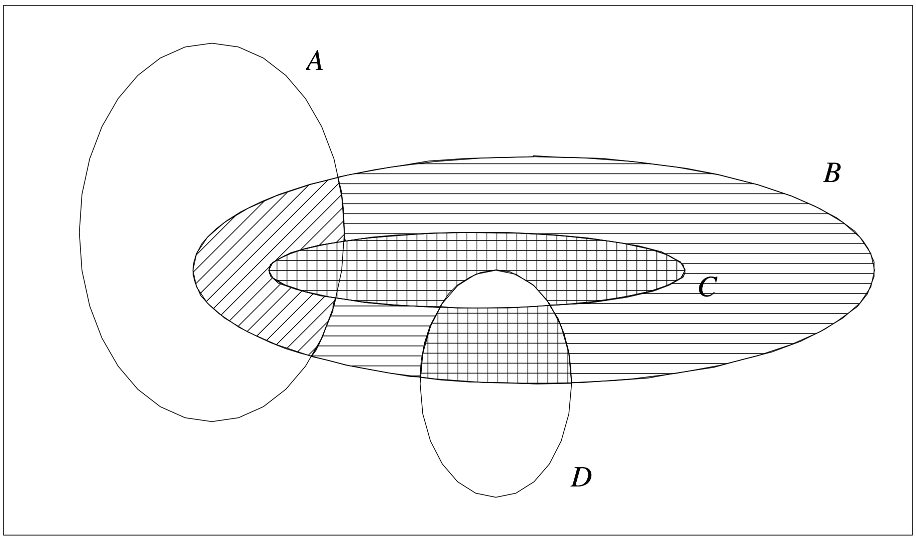
a) 5 **b)** 8 **c)** 1000

Aufgabe 8.19:

a)=c), b)=e) und d)=f)

Grundzüge der Mengenlehre

Aufgabe 1.1:



a) diagonal schraffierte Fläche
b) horizontal schraffierte Fläche

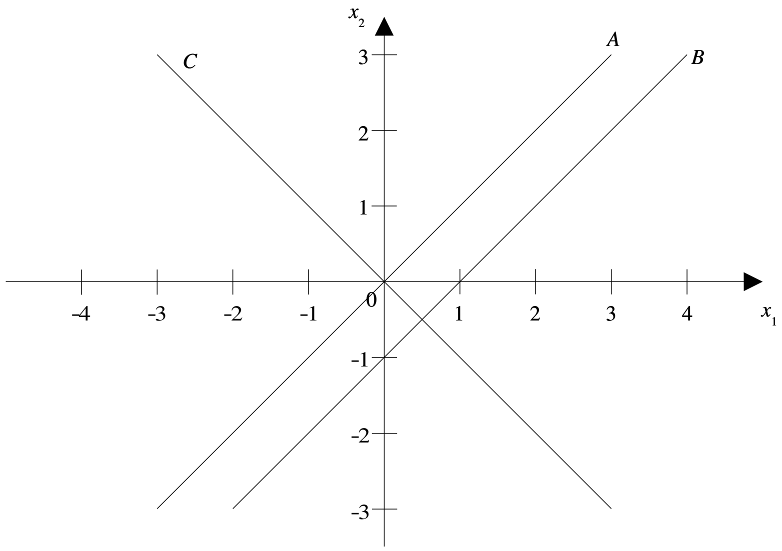
Aufgabe 1.2:

a) A	**b)** C	**c)** f
d) f	**e)** w	

Aufgabe 1.3:

a) 120	**b)** 115	**c)** w
d) w	**e)** f	

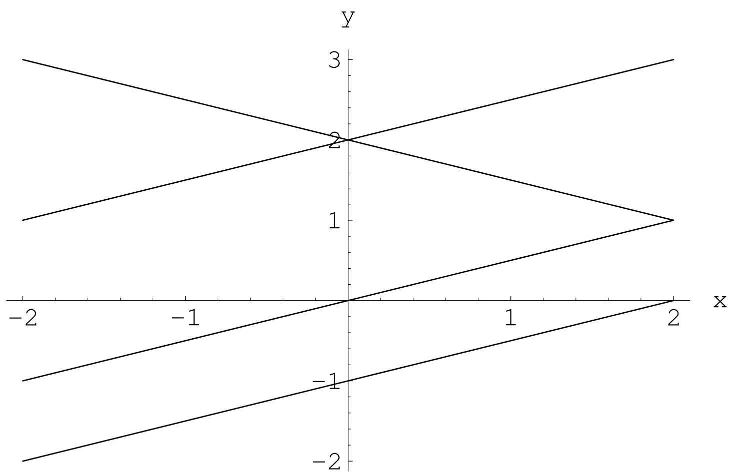
Aufgabe 1.4:



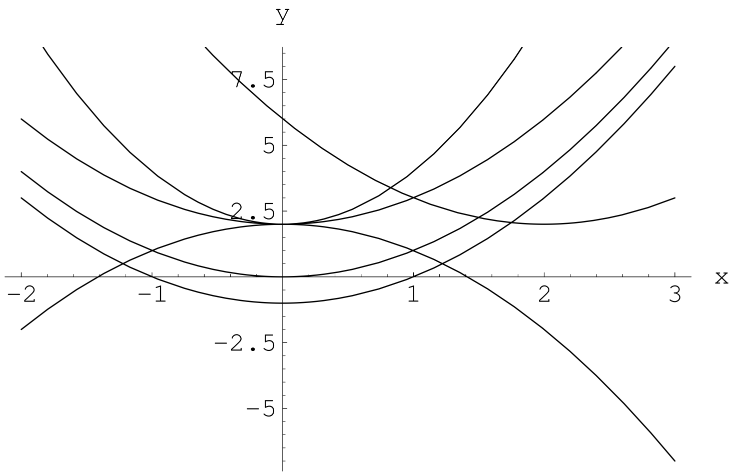
$A \cap C = \{(0,0)\}$

Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

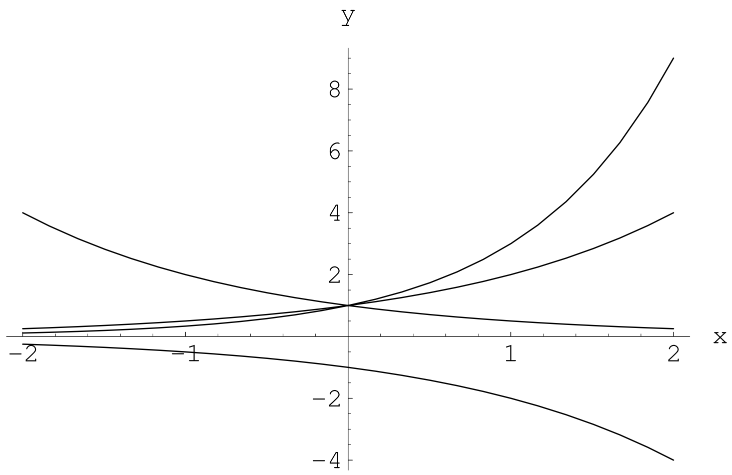
Aufgabe 2.1:



Aufgabe 2.2:


y
7.5
5
2.5
-2.5
-5
x
-2
-1
1
2
3

Aufgabe 2.3:



Ableitung von Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 3.1:

a) $f'(x) = 13x^{12}$
b) $f'(x) = 42x^5$
c) $f'(x) = 0,25\,x^{-0,75}$
d) $f'(x) = -4x^{-5}$
e) $f'(x) = -x^{-1,25}$
f) $f'(x) = 0$
g) $f'(w) = -3w^{-2}$
h) $f'(w) = 0$
i) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
j) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

Aufgabe 3.2:

a) $f'(x) = e^x$
b) $f'(x) = 2^x \ln 2$
c) $f'(x) = x^{-1}$
d) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$

Aufgabe 3.3:

a) $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$
b) $f'(x) = 4x + 4x^{-1} + 5e^x$
c) $f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$
d) $f'(x) = 6abcdx^5$
e) $f'(x) = 6abcdx^5$
f) $f'(x) = 2ax - 2xe^x - x^2e^x$

Aufgabe 3.4:

a) $f'(x) = 2x(4 + 2x) + 2(x^2 - 1)$
b) $f'(x) = acx^2 + 2cx(ax - b)$
c) $f'(x) = -3(1 + x)(x + 2) + (2 - 3x)(x + 2) + (2 - 3x)(1 + x)$
d) $f'(x) = 2x(4x + 6) + 4x^2$
e) $f'(x) = 2 - (x^2 + 3)x^{-2}$

Aufgabe 3.5:

a) $f'(x) = \frac{2x^2-(x^2+3)}{x^2}$ **b)** $f'(x) = \frac{4(x+5)-4x}{(x+5)^2}$

c) $f'(x) = \frac{x-(x+7)}{x^2}$ **d)** $f'(x) = \frac{2ax(cx+d)-c(ax^2+b)}{(cx+d)^2}$

Aufgabe 3.6:

a) $\frac{df(x)}{dx} = a$ **b)** $\frac{dxf(x)}{dx} = 2ax + b$

c) $\frac{d\frac{1}{f(x)}}{dx} = \frac{-a}{(ax+b)^2}$ **d)** $\frac{d\frac{f(x)}{x}}{dx} = \frac{ax-(ax+b)}{x^2}$

Aufgabe 3.7:

a) $f'(x) = 4(2x^3 - x^2 + 2)^3(6x^2 - 2x)$
b) $f'(x) = 2\left(2x^3 - x(x^3+4)^3\right)\left(6x^2 - (x^3+4)^3 - 3x(x^3+4)^2 \cdot 3x^2\right)$
c) $f'(x) = \sqrt{ax^2-1} + \frac{1}{2}x(ax^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ax$
d) $f'(x) = \frac{1}{2}(x + x^{1/2})^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$
e) $f'(x) = ae^{ax}$
f) $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$
g) $f'(x) = e^{(ax)^2} + xe^{(ax)^2} \cdot 2a^2x$
h) $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x)^{-1/2}$
i) $f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$
j) $f'(x) = (1-x^3)^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^3)^{-3/2}(-3x^2)$
k) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$
l) $f'(x) = \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2 2\left(\frac{x-a}{x-b}\right)\frac{x-b-(x-a)}{(x-b)^2}$
m) $f'(x) = a\left((-2x^{-3})(\ln x)^{-3} + x^{-2}(-3)(\ln x)^{-4}x^{-1}\right)$
n) $f'(x) = \frac{1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2-1}}$
o) $f'(x) = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}$
p) $f'(x) = \left(1 + (a+x^3)^2\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 + (a+x^3)^2\right)^{-3/2}\left(2(a+x^3) \cdot 3x^2\right)$

Gleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 4.1:

a) $x = -15$ **b)** $x = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 4.2:

a) $x = 64$ **b)** keine Lösung **c)** $x = 5$

Aufgabe 4.3:

a) $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = \log_5 20$
c) $x = 2 \vee x = -1$ **d)** $x = 3$
e) keine Lösung **f)** $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
g) $x \in \{-1, 1, 2, -2\}$ **h)** $x \in \{0, 4, -2\}$
i) $x = 0 \vee x = 3$ **j)** $x = 0 \vee x = 7$
k) $x = -3 \vee x = 3$ **l)** $x = -6 \vee x = 1$
m) $x \in \{-1, \frac{2}{3}, 0\}$ **n)** $x = -2$
o) keine Lösung

Ungleichungen mit einer Unbekannten

Aufgabe 5.1:

$$x \geq \frac{1}{3}y - 1$$

Aufgabe 5.2:

a) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

b) $\mathbb{R} \setminus [-4, -3]$

c) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

d) $\emptyset$

e) $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

f) $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

g) $(5, \infty)$

h) $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

i) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

j) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

k) $\emptyset$

l) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Aufgabe 5.3: Schreiben Sie als Intervall:

a) $[2, 6]$

b) $[3, 5]$

c) $(2, 3]$

d) $(-2, 0)$

Gleichungssysteme

Aufgabe 6.1:

a) $x = 20 \land y = -8$

b) $x = \frac{7}{13} \land y = -\frac{1}{13}$

c) $x = 2 \land y = -3$

d) keine Lösung

Grundzüge der Lineare Algebra

Aufgabe 7.1:

a) $x+y=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ **b)** $x+y=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

c) $x+y=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ **d)** $x+y=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.2:

a) $\alpha x=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\alpha x=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

c) $\alpha x=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ **d)** $\alpha x=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.3:

a) $xy=2$ **b)** $xy=\sqrt{2}$ **c)** $xy=0$
d) $xy=-\sqrt{2}$ **e)** $xy=-2$

Zeichnet man x und y in ein Koordinatensystem, dann sieht man, daß xy am größten ist, wenn x und y genau in dieselbe Richtung zeigen, 0 wird, wenn sie senkrecht zueinander stehen und am kleinsten ist, wenn x und y genau in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Aufgabe 7.4:

a) $||x||=1$ **b)** $||x||=2$ **c)** $||x||=2$

Aufgabe 7.5: Bestimmen Sie die folgenden Matrizenprodukte:

a) $\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-5&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-16&6\\-13&4\end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}4&2\\1&3\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}8&2\\7&-2\\0&-3\end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2&4&1\\1&-7&2\\1&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&5&0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&9&-7\\1&14&3\end{bmatrix}$

C. Verzeichnis mathematischer Symbole

Allgemeine Symbole der Mathematik

$=$	gleich
$:=$	definitionsgemäß gleich
$\neq$	ungleich
$\approx$	ungefähr gleich
$+$	Additionszeichen (sprich: plus)
$-$	Subtraktionszeichen (sprich: minus)
$\cdot$	Multiplikationszeichen (sprich: mal)
$:, /$	Divisionszeichen (spricht: geteilt durch)
$>$	größer als
$\geq$	größer oder gleich
$<$	kleiner als
$\leq$	kleiner oder gleich
Σ	Summenzeichen
Π	Produktzeichen
$\sqrt{x}$	Quadratwurzel (sprich: Wurzel aus x)
$\sqrt[n]{x}$	n-te Wurzel aus x
a^b	Potenz (sprich: a hoch b)
$\lvert x \rvert$	Betrag von x
$f : A \to B$	f ist Funktion von A nach B
$f : a \mapsto b$	a wird abgebildet auf b

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der reellen Zahlen größer gleich 0
$\mathbb{R}_{++}$	Menge der reellen Zahlen größer als 0
$\mathbb{R}^n$	n-faches kartesisches Produkt von $\mathbb{R}$
$[a, b]$	Geschlossenes Intervall
(a, b)	Offenes Intervall
$(a, b]$	Linksoffenes Intervall
$[a, b)$	Rechtsoffenes Intervall

Spezielle Zahlen

e	Eulersche Zahl, $e \approx 2,718281828$
π	Pi, Kreiszahl, $\pi \approx 3,141592654$
∞	Unendlich

Logik

$\wedge$	Konjunktion (sprich: und)
$\vee$	Disjunktion (sprich: oder)
$\neg A, \bar{A}$	Negation (sprich: nicht)
$A \Rightarrow B$	Implikation (sprich: wenn A, dann B)
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz (sprich: A genau dann, wenn B)
$A :\Leftrightarrow B$	Definition (sprich: A nach Definition genau dann, wenn B)
$\exists x$	Existenzquantor (sprich: es gibt ein x)
$\forall x$	Allquantor (sprich: für alle x)

Mengenlehre

$\in$	ist Element von
$\notin$	ist nicht Element von
$\emptyset, \{\}$	Leere Menge
$\{\, x \mid A(x)\}$	Menge aller x mit der Eigenschaft $A(x)$
$\lvert A \rvert$	Mächtigkeit von A
$\cup$	Vereinigungsmenge (sprich: vereinigt mit)
$\cap$	Schnittmenge (sprich: geschnitten mit)
$\setminus$	Differenzmenge (sprich: minus)
$\subseteq$	Teilmenge von
$\subset$	echte Teilmenge von
$\mathcal{C}_\Omega A$	Komplement von A bezüglich Ω
$\wp(A)$	Potenzmenge von A
$A \times B$	Kartesisches Produkt von A und B
(a, b)	Geordnetes Paar aus a und b (Tupel)
$(a_1, \ldots, a_n)$	n-Tupel

Ableitungen

$\frac{d\,f(x)}{d\,x}, f'(x)$	Erste Ableitung von $f(x)$
$\frac{d^2\,f(x)}{d\,x^2}, f''(x)$	Zweite Ableitung von $f(x)$
$\frac{d^n\,f(x)}{d\,x^n}, f^{(n)}(x)$	n-te Ableitung von $f(x)$
$x \to a$	Konvergenz von x gegen a (sprich: x gegen a)

Lineare Algebra

$\|\|a\|\|$	Norm oder auch Länge des Vektors a
$(a_{ij})_{n\times m}$	Matrix mit n Zeilen, m Spalten und den Elementen a_{ij}
$A^\top$	Transponierte Matrix zu A (sprich: A transponiert)
A^{-1}	Inverse Matrix zu A
$\|A\|$	Determinante von A

D. Das griechische Alphabet

Üblicherweise werden in mathematischen Texten Objekte aller Art wie beispielweise Variablen und Funktionen nicht nur mit lateinischen, sondern auch mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Aus diesem Grund ist für die flüssige Lektüre solcher Texte Kenntniss zumindest der gebräuchlichsten griechischen Buchstaben recht hilfreich. Nachfolgend ist eine Aufstellung aller griechischen Groß- und Kleinbuchstaben angegeben.

Bezeichung	Großbuchstabe	Kleinbuchstabe
Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ, ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ, ϑ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
My (sprich: mü)	M	μ
Ny (sprich: nü)	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ, ϱ
Sigma	Σ	σ, ς
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ, φ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Literaturverzeichnis

[1] P. Dörsam (2014). *Mathematik zum Studiumsanfang.* 8. Auflage. Heidenau: PD.

[2] G. Piehler, D. Sippel und U. Pfeiffer (2000). *Mathematik zum Studieneinstieg.* 3. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer.

[3] W. Purkert (2014). *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* 8. Auflage. Leipzig: Teubner.

[4] J. Schwarze (2010). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Elementare Grundlagen für Studienanfänger.* 8. Auflage. Herne, Berlin: nwb.

[5] J. Schwarze (2015). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Band 1: Grundlagen.* 14. Auflage. Herne, Berlin: nwb.

[6] J. Schwarze (2010). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Band 2: Differential- und Integralrechnung.* 13. Auflage. Herne, Berlin: nwb.

[7] J. Schwarze (2010). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler - Band 3: Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Graphentheorie.* 13. Auflage. Herne, Berlin: nwb.

[8] J. Schwarze (2015). *Aufgabensammlung zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.* 7. Auflage. Herne, Berlin: nwb.