

1 Quasikonkavität: Wieso, Weshalb, Warum

Innerhalb der Nutzenmaximierung geht es für einen Konsumenten darum, ein Güterbündel zu finden, das ihm den größten Nutzen spendet und das er sich gleichzeitig leisten kann. In der VWL nehmen wir an, dass jeder Konsument Präferenzen hat, die es ihm ermöglichen diese Entscheidung zu treffen. Es wird deshalb angenommen, dass eine Konsumentin ALLE Güterbündel bewerten und ein Ranking aufstellen kann. Eine weitere Annahme ist, dass die Präferenzen konvex sind, d.h. Konsumentinnen bevorzugen Durchschnitte gegenüber Extrema haben. Nehmen wir drei Güterbündel. A enthält ein Bier und keine Cola, B enthält eine Cola, aber kein Bier und Güterbündel C enthält eine halbe Cola und ein halbes Bier. Wir nehmen an, dass die Konsumentin indifferent zwischen A und B ist. Wenn ihre Präferenzen konvex sind, spendet Güterbündel C mindestens so viel Nutzen wie A oder B. Meistens nehmen wir sogar an, dass die Präferenzen der Konsumentin streng konvex sind. Dann spendet Güterbündel C einen höheren Nutzen als die anderen beiden.

Eine Nutzenfunktion $u(x)$ (x ist hier ein Güterbündel) repräsentiert diese Präferenzen, wenn Güterbündel A gegenüber Güterbündel B präferiert wird und gleichzeitig der Gesamtnutzen von A größer ist als der Gesamtnutzen von B, also $u(A) > u(B)$. Die Nutzenfunktion, die die Präferenzen einer Konsumentin repräsentiert, ist aber nicht eindeutig. Mehrere Nutzenfunktionen können dieselben Präferenzen repräsentieren, wenn bei allen das Ranking der Güterbündel gleich ist. Deshalb ist es auch sehr schwer, den Nutzen zwischen zwei Personen zu vergleichen. Hier ein Beispiel. Nehmen wir für Anna an, dass der Wert ihrer Nutzenfunktion am Maximum 350 ist. Johnny hat auch maximiert und seine Nutzenfunktion spuckt den Wert 35 aus. Geht es Anna (10x) besser als Johnny? Vielleicht. Um dies zu zeigen, führen wir den Begriff der (positiven) monotonen Transformation ein.

Definition 1.1. (*positive*) *Monotone Transformation:* Eine (*positive*) *monotone Transformation* ist eine strikt steigende Funktion, d.h. wenn $y > x$, dann $f(y) > f(x)$.

Es sei $u(x)$ die Nutzenfunktion, die Johnnys Präferenzen repräsentiert. Die monotone Transformation

$$g(x) = 5u(x) + 200$$

verändert das Ranking der Güterbündel nicht (überzeugen Sie sich) und repräsentiert somit auch seine Präferenzen. Nun entscheidet er sich genauso wie vorher, aber sein Nutzen ist gleich $g(x) = 5 \cdot 35 + 200 = 375$ und somit größer als Annas. Das Beispiel zeigt, dass es schwierig ist, den Nutzen zweier Individuen zu vergleichen.

Nutzenfunktionen repräsentieren also Präferenzen und eine monotone Transformation einer Nutzenfunktion ändert das Ranking der Güterbündel nicht. Man nennt dies eine *ordinale* Eigenschaft unserer Nutzenfunktion, weil es nicht auf den exakten Wert eines Nutzenniveaus ankommt, sondern nur auf das Ranking der Güterbündel. Eigenschaften, die vom exakten Wert einer Funktion abhängen, nennt man *kardinal*. Wir werden sehen, dass innerhalb der Nutzenmaximierung Kardinalität eine untergeordnete Rolle spielt, weil es uns nur darauf ankommt, dass der Konsument ein Ranking der Güterbündel aufstellen kann.

Wir werden im Folgenden annehmen, dass Präferenzen streng konvex sind. Welche Eigenschaft wird durch diese Annahme auf die Nutzenfunktion übertragen? Wir werden nun sehen, dass diese Eigenschaft sehr eng mit quasikonkaven Funktionen verbunden ist. Um dies etwas formaler darzustellen, führen wir nun den Begriff der Bessermenge (engl.: upper contour set) einer Nutzenfunktion ein.

Definition 1.2 (Bessermenge, upper contour set). *Es sei $U(x, y)$ eine Nutzenfunktion von zwei Variablen mit Definitionsbereich \mathbb{R}_+^2 und (\bar{x}, \bar{y}) ein Güterbündel. Die Menge aller Güterbündel (x, y) , deren Nutzenniveau mindestens so groß wie $U(\bar{x}, \bar{y})$ ist, wird als Bessermenge von (\bar{x}, \bar{y}) bezeichnet. Formal*

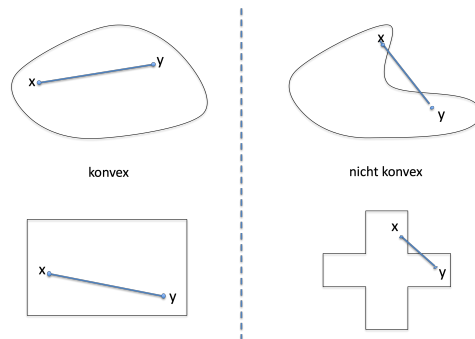
$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : U(x, y) \geq U(\bar{x}, \bar{y})\}$$

Die Bessermenge eines Güterbündels A mit Nutzenniveau a besteht also aus allen Güterbündeln, die mindestens soviel Nutzen spenden wie Güterbündel A . Und jetzt kommt's:

Theorem 1.1. *Wenn Präferenzen (streng) konvex sind, müssen alle Bessermengen einer Nutzenfunktion (streng) konvexe Mengen sein.*

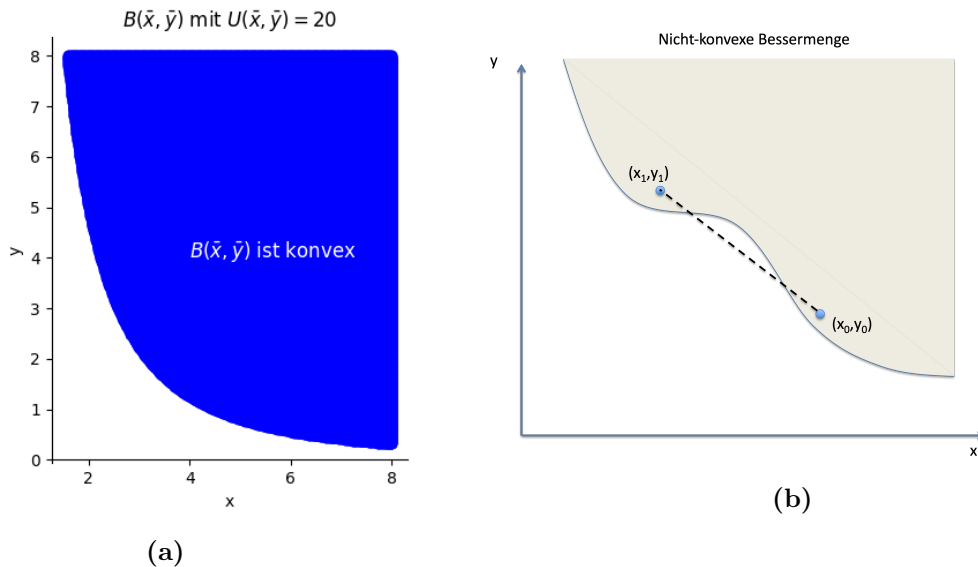
Hier erinnern wir uns daran, dass es konvexe Funktionen und konvexe Mengen gibt. Wir reden hier über konvexe Mengen. Nehmen Sie zwei beliebige Punkte einer Menge. Die Menge ist konvex, wenn alle Punkte, die auf einer Geraden zwischen den zwei Punkten liegen, auch in der Menge sind. Abbildung 1 verdeutlicht dies.

Abbildung 1



Man darf aber jetzt nicht denken, dass nur beschränkte Mengen Konvex sein können. Ein instruktives Beispiel sind die Mengen, mit denen wir am vertrautesten sind: die Bessermengen von Nutzenfunktionen. Wir betrachten ein beliebiges Güterbündel A . Die Bessermenge dieses Güterbündels sind dann alle Punkte, die mindestens so viel Nutzen spenden wie Punkte auf der zu A gehörenden Indifferenzkurve. Wie man in Abbildung 2a sieht, sind die Bessermengen unbeschränkt aber konvex. In Abbildung 2b zeigen wir zusätzlich eine unzulässige Nutzenfunktion, die nicht-konvexe Bessermengen hat.

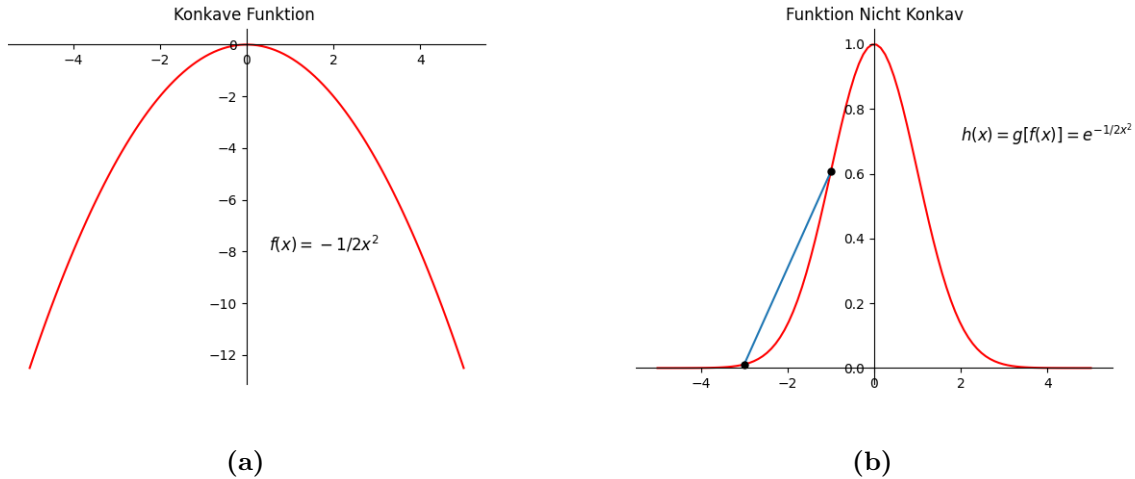
Abbildung 2



Wir sind also auf der Suche nach Nutzenfunktionen, die konvexe Bessermengen haben. Dies ist für konkave Funktionen der Fall. Deshalb beantworten wir jetzt zunächst die Frage, warum es keinen Sinn macht, exklusiv mit konkaven Nutzenfunktionen zu arbeiten. Konkavität ist eine in

der Optimierung sehr nützliche Eigenschaft. Man denke nur daran, dass $f'(x) = 0$ auf einmal eine hinreichende Bedingung für ein *globales* Maximum ist. Leider ist Konkavität nicht nur eine strikte Annahme, sondern auch eine kardinale Eigenschaft, die nicht jeder monotonen Transformation standhält. Zum Beispiel ist $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ konkav und $g(x) = e^x$ eine monotone Transformation. Die Funktion $h(x) = g[f(x)] = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist aber nicht konkav! Diese Tatsache wird von den folgenden Graphen verdeutlicht.

Abbildung 3



Man sieht in Abbildung 3b, dass die Funktionswerte der Funktion zwischen den zwei Punkten komplett unterhalb der Verbindungsgerade liegen. Die Funktion ist also nicht konkav!

Da mehrere Nutzenfunktionen dieselben Präferenzen abbilden können, wollen wir, dass die Eigenschaften unserer Nutzenfunktion auch monotonen Transformationen standhalten. Zudem sollte man immer nur Annahmen machen, die man ökonomisch vertreten kann. Jede Annahme gibt dem Problem zwar mehr Struktur und liefert im Normalfall mehr Ergebnisse. Jede Annahme erhöht aber auch die Gefahr, dass das Modell zu speziell wird und die Realität verfehlt. Die Annahme einer konkaven Nutzenfunktion erleichtert zwar die Optimierung, ist aber ökonomisch nicht zu vertreten, wenn eine Klasse von Funktionen existiert, die auch unsere Minimalanforderung konvexer Bessermengen erfüllt und weniger restriktiv ist. Dies ist für quasikonkave Nutzenfunktionen der Fall.

Es gibt also (mindestens) drei Gründe, warum Ökonomen nicht mit konkaven Nutzenfunktionen arbeiten

1. Die Bessermengen der Nutzenfunktion müssen konvex sein. Wir werden gleich sehen, dass es hier ausreicht Quasikonkavität anzunehmen.
2. Es kommt nur auf das von den Präferenzen abgeleitete Ranking der Güterbündel an. Um dieses zu erhalten, muss eine Funktion nicht konkav sein. Gleichzeitig sollte man beim Modellieren von menschlichem Verhalten nur Annahmen treffen, die wirklich nötig sind. Konkave Funktionen sind leichter zu maximieren. Das ist schön, kann aber die Allgemeinheit des Modells vermindern.
3. Monotone Transformationen verändern das Ranking der Güterbündel nicht, können aber dazu führen, dass die transformierte Funktion nicht mehr konkav ist.

Was tun? Wir suchen nun also eine Art von Funktion, deren Eigenschaften einer monotonen Transformation standhalten und deren Bessermengen konvex sind. Voilà, hier kommen die quasikonkaven Funktionen! Die folgenden zwei Theoreme zeigen dies.

Theorem 1.2. *Die monotone Transformation einer quasikonkaven Funktion ist quasikonkav.*

Theorem 1.3. *Es sei f eine reelle Funktion einer oder mehrerer Variablen, die auf einer konvexen Menge definiert ist. Die Funktion f ist quasikonkav, wenn und nur wenn ALLE Bessermengen der Funktion konvexe Mengen sind.*

Theorem 1.3 ist eine Äquivalenz (gilt in beide Richtungen). Das heißt, dass man um quasikonkave Funktionen gar nicht herumkommt, wenn man annehmen will, dass die Bessermengen konvex sind. Genauer gesagt werden quasikonkave Funktionen als Funktion mit konvexen Bessermengen definiert. Bevor wir uns ein paar Beispiele angucken, liefern wir jetzt eine weitere Definition einer quasikonkaven Funktion.

Definition 1.3. *Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich D eine konvexe Menge ist. $f(x)$ ist*

- *quasikonkav, wenn und nur wenn für alle $x, y \in D$ und für $0 \leq \lambda \leq 1$*

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \geq \min[f(x), f(y)]$$

- *streng quasikonkav, wenn und nur wenn für alle $x, y \in D$ und für $0 < \lambda < 1$*

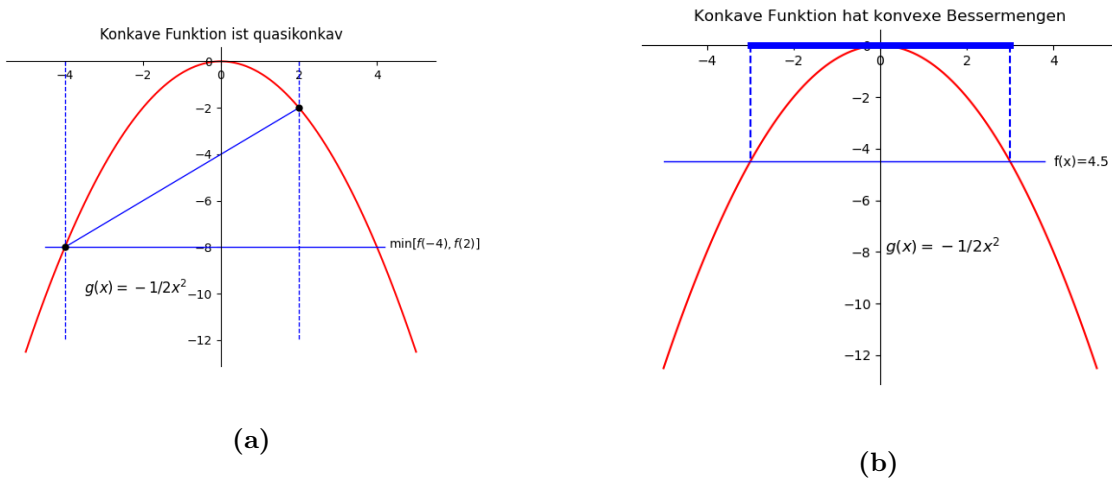
$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] > \min[f(x), f(y)]$$

Wenn wir also zwei beliebige Punkte x und y im Definitionsbereich betrachten und eine Linie zwischen den Funktionswerten der beiden Punkte ziehen, muss der Funktionswert zwischen x und y immer mindestens so hoch sein wie das Minimum von $f(x)$ und $f(y)$.

Wir zeigen zunächst in Abbildung 4a, dass eine konkave Funktion quasikonkav ist. In Abbildung 4a wählen wir die Punkte $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$. Wir verbinden $f(x_1)$ und $f(x_2)$ mit einer Linie und sehen, dass ALLE Funktionswerte dazwischen größer als diese Gerade sind. Die Funktion ist also (streng) konkav.¹ Das impliziert natürlich, dass alle Funktionswerte zwischen x_1 und x_2 größer als das Minimum von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ (hier $f(x_1) = -8$) sind. Die Funktion ist somit auch quasikonkav. Abbildung 4b zeigt die Bessermenge zum Funktionswert $f(x) = 4.5$. Sie ist gleich der Menge aller x -Werte im Definitionsbereich, die einen Funktionswert von 4,5 oder höher haben. Diese Menge ist blau gekennzeichnet und konvex. Es ist wichtig zu realisieren, dass eine Bessermenge Teil des Definitionsbereichs ist (und nicht Mengen ober- oder unterhalb des Graphs der Funktion betrachtet).

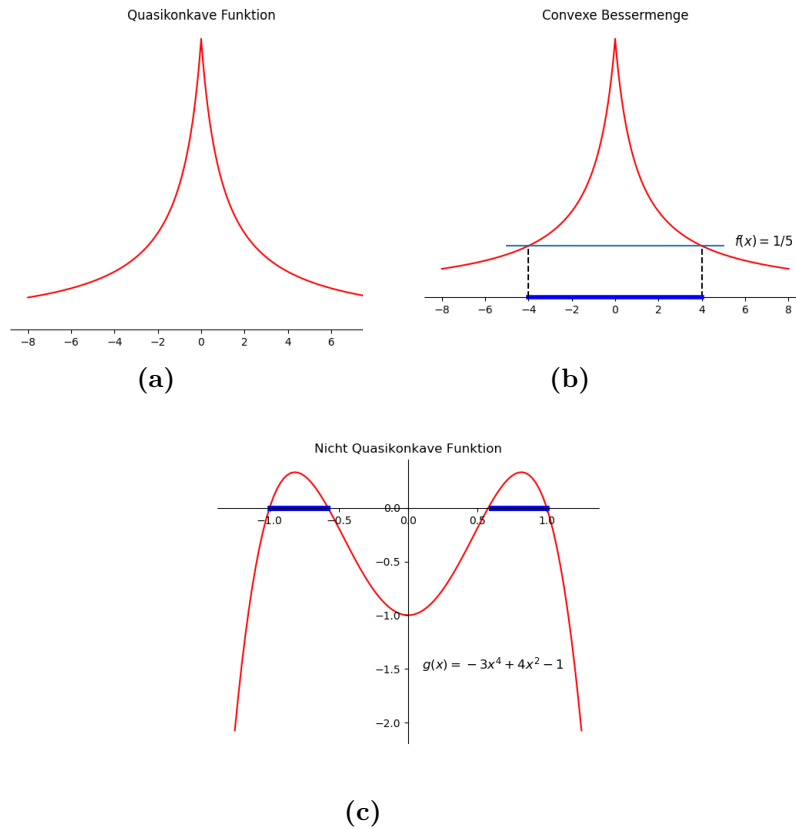
¹Ja, ja, das ist natürlich kein formaler Beweis und das Statement muss für beliebige Punkte x_1, x_2 gelten.

Abbildung 4



Was das Beispiel zeigt, ist allgemeingültig. Konkave Funktionen sind quasikonkav (aber nicht umgekehrt) und besitzen konvexe Bessermengen. Wir zeigen nun an einem Beispiel, dass auch quasikonkave Funktionen konvexe Bessermengen haben. Vergewissern Sie sich zunächst, dass die Funktion in Abbildung 5a quasikonkav ist (aber nicht konkav). Abbildung 5b zeigt eine konvexe Bessermenge dieser Funktion.

Abbildung 5

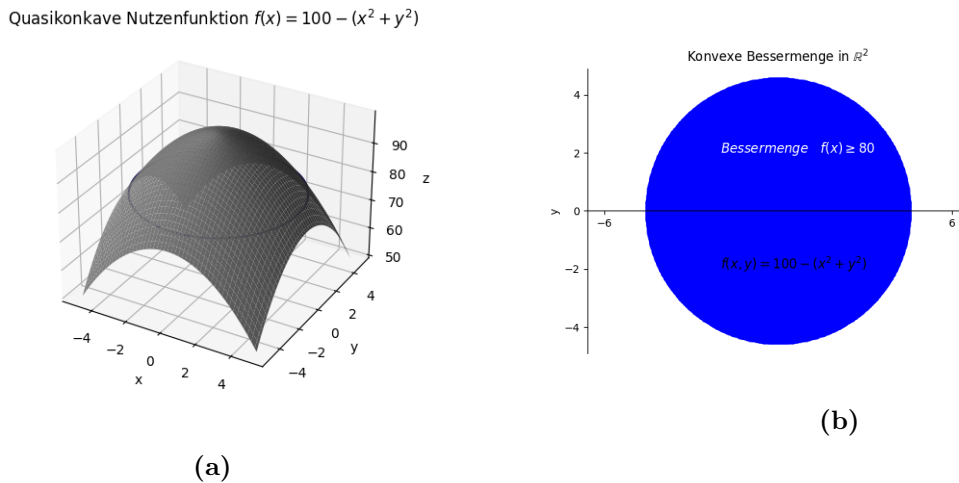


Wir präsentieren jetzt noch ein anschauliches Beispiel einer Funktion, die nicht quasikonkav ist und bei der nicht alle Bessermengen konvex sind. Wir sehen in Abbildung 5c, dass die Bessermenge aus

zwei Teilmengen besteht und somit nicht konvex ist.

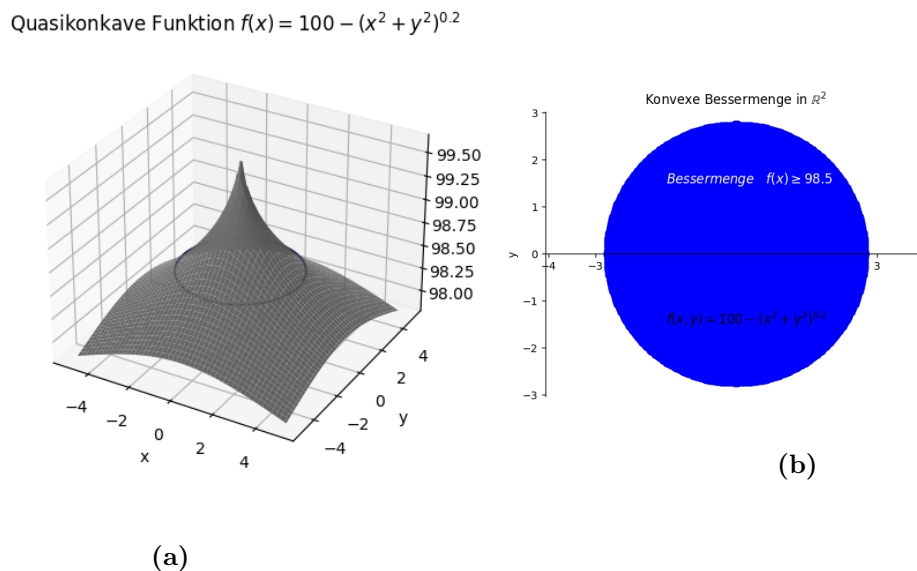
Wir können das bisher Gelernte auch auf Funktionen mehrerer Variablen übertragen. Wir betrachten deshalb zum Abschluss noch die Bessermengen einer konkaven und zweier quasikonkaven Funktionen zweier Variablen. Wir beginnen mit der Funktion $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$. Diese Funktion ist konkav, was aus Abbildung 6a ersichtlich ist. In dieser Abbildung ist auch die Höhenlinie für $f(x, y) = 80$ eingezeichnet. Alle Funktionswerte, die größer oder gleich 80 sind, werden von der Bessermenge in Abbildung 6b erreicht, die konvex ist. Wieder erinnern wir uns daran, dass Bessermengen Teilmengen des Definitionsbereichs einer Funktion sind.

Abbildung 6



Nun präsentieren wir die Funktionsgraphen und Bessermengen von zwei quasikonkaven Funktionen. Abbildung 7a ist das 3-dimensionale Gegenstück zu Abbildung 5a. In Abbildung 7b ist eine typische Bessermenge dieser Funktion dargestellt, die konvex ist.

Abbildung 7

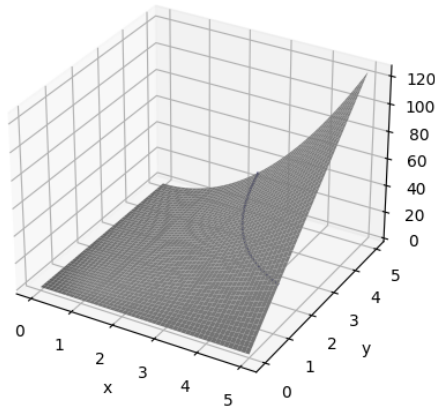


Die nächste Abbildung ist in zweierlei Hinsicht interessant. Erstens hat die Funktion eine Form wie viele in der VWL verwendete Nutzenfunktionen und somit die typischen Bessermengen (nordöstlich der Indifferenzkurven). Zweitens sehen wir hier eine unbeschränkte Bessermenge, die natürlich auch

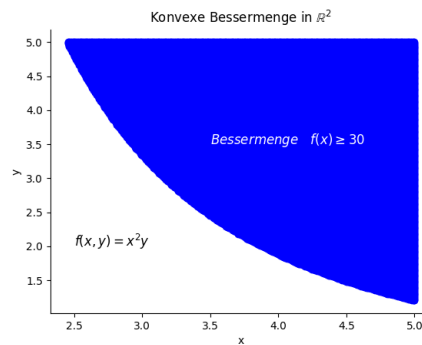
konvex ist.

Abbildung 8

Quasikonkave Nutzenfunktion $f(x) = x^2y$



(a)

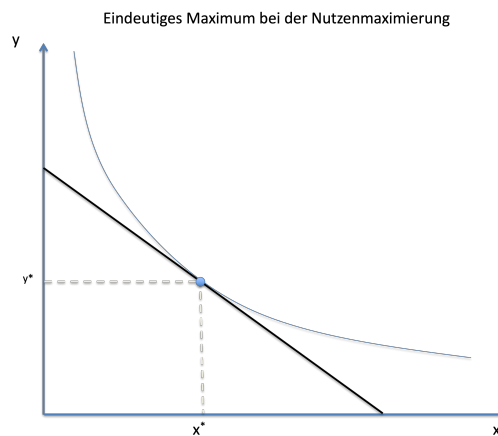


(b)

Zum Schluss erinnern wir uns daran, dass konkave Funktionen die Optimierung deutlich vereinfachen. Wie sieht das bei quasikonkaven Funktionen aus? Auch die Annahme der Quasikonkavität macht uns das Leben etwas einfacher. Aber jetzt sind die Bedingungen erster Ordnung beim Optimieren ohne Nebenbedingungen nur noch hinreichend für ein globales Maximum, wenn das gefundene Maximum strikt ist.

In der VWL optimieren wir meist mit Nebenbedingungen. Auch hier hilft Quasikonkavität. Wenn die Nebenbedingung linear ist und die Bessermengen der Nutzenfunktion streng konvex, ist der Punkt, der die Bedingungen erster Ordnung des Lagrange-Problems erfüllt ein eindeutiges, globales Extremum. Dies ist zum Beispiel bei den meisten Nutzenmaximierungsproblemen gegeben. Abbildung 9 verdeutlicht dies.

Abbildung 9



Last but not least noch eine Frage zum Üben.

1. Ein Freund von Ihnen behauptet, dass eine reelle Funktion *einer* Variablen definiert auf $[a, b]$ quasikonkav ist, wenn
 - die Funktion monoton steigend ist.
 - die Funktion monoton fallend ist.
 - ein Punkt $x \in [a, b]$ existiert, so dass die Funktion monoton steigend auf $[a, x]$ und monoton fallend auf $[x, b]$ ist.

Stimmt das?

2. Ist $f(x) = x^3$ quasikonkav?