Lösungen zu den Übungsaufgaben Mathevorkurs

Stand: 27. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Arithmetik

1.1 Ausklammern/Ausmultiplizieren

Aufgabe 1: Klammern Sie aus (soweit wie möglich)!

1. $8 + [(9 - 2) - (1 + 8)] = 6$
2. $-2 \cdot [(3 - 7) - (9 + 1)] = 28$
3. $(a + b) : (c + d) = \dfrac{a}{c + d} + \dfrac{b}{c + d}$
4. $x(x + y)(x - z)(x + 3) = x^4 + x^3y - x^3z - x^2yz + 3x^3 + 3x^2y - 3x^2z - 3xyz$
5. $(9 - a)(b + c) - ac = 9b + 9c - ab - 2ac$
6. $(x - b)(x + a)(x + b) = x^3 + ax^2 - b^2x - ab^2$
7. $7 \cdot (8 - 2a)(b + 5 \cdot 19) = 56b - 14ab - 1330a + 5320$
8. $\frac{1}{2}a(t - 1)^2 = \dfrac{at^2}{2} - at + \dfrac{a}{2}$
9. $K_0 \cdot \left(\dfrac{100 + p}{100} - w\right)(1 - t) = K_0 + 0.01pK_0 - wK_0 - tK_0 - 0.01pK_0t + wtK_0$
10. $\left(p + \dfrac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = pV + \dfrac{an^2}{V} - bnp - \dfrac{abn^3}{V^2}$

Aufgabe 2: Klammern Sie ein!

1. $6 \cdot 3 - 3 \cdot 9 \cdot 2 = 3 \cdot (6 - 9 \cdot 2)$
2. $2 \cdot 13 + 13 \cdot 4 - 1 \cdot 13 - 1 \cdot 13 = 13 \cdot [(2 + 4) - (1 + 1)]$
3. $D \cdot \left(\dfrac{6\pi}{D} - \pi\left(\dfrac{m}{D^2} - \dfrac{B^3}{D^2}\right) \cdot D\right) = \pi(6 - m + B^3)$
4. $x^2 - 3x + 2$ Tipp: Nutzen Sie die Nullstellen! $= (x - 1)(x - 2)$
5. $x^2 - 2nx + n^2 + d = (x - n)^2 + d = \left(x - \left(n + \sqrt{-d}\right)\right)\left(x - \left(n - \sqrt{-d}\right)\right)$
6. $16y^2 - stx + sy^2t - (4\sqrt{x})^2 = (y^2 - x)(16 + st)$
7. $\dfrac{cf^{-1}}{a + b} + \dfrac{3}{fa + bf} - \dfrac{\phi}{f(a + b)} = \dfrac{c + 3 - \phi}{f(a + b)}$
8. $e^2 - \pi^2 = (e - \pi)(e + \pi)$
9. $R_H \cdot \dfrac{c}{-2n + n^2 + 1} - c\dfrac{1}{m^2} \cdot R_H = cR_H\left(\dfrac{1}{(n - 1)^2} - \dfrac{1}{m^2}\right)$
10. $\dfrac{v^2}{100} + 0.4v + 4 + \dfrac{3}{10}v + 6$ Tipp: Klammern Sie $(v + 20)$ aus!
    $= \dfrac{(v + 20)^2}{100} + \dfrac{3}{10}(v + 20) = (v + 20)\left(\dfrac{v + 20}{100} + \dfrac{3}{10}\right)$
11. $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{ab} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{b^2 + 2ab + +a^2}{a^2b^2} = \left(\dfrac{a + b}{ab}\right)^2$

1.2 Erweitern/Kürzen

Aufgabe 1: Kürzen Sie so weit wie möglich!

1. $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
2. $\frac{72}{24} = 3$
3. $\frac{36}{30} = \frac{6}{5}$
4. $\frac{12}{6} = 2$
5. $\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
6. $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$
7. $\frac{40}{72} = \frac{5}{9}$
8. $\frac{28}{20} = \frac{7}{5}$
9. $\frac{10}{2} = 5$
10. $\frac{14}{7} = 2$
11. $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
12. $\frac{18}{864} = \frac{1}{48}$
13. $\frac{24}{368} = \frac{3}{46}$
14. $\frac{46}{16} = \frac{23}{8}$
15. $\frac{8}{4} = 2$
16. $\frac{480a}{16a^2} = \frac{30}{a}$
17. $\dfrac{434x}{7} = 62x$
18. $\frac{291x^2y}{3xy} = 97x$
19. $\dfrac{360e^{-x^2}}{28e^{-x^2}} = \dfrac{90}{7}$
20. $\dfrac{AUGE}{HAND} = \dfrac{UGE}{HND}$

Aufgabe 2: Erweitern Sie auf den kleinstmöglichen, gleichen Nenner!

1. $\frac{5}{12}, \frac{9}{27} \Rightarrow \frac{5}{12}, \frac{4}{12}$
2. $\frac{2}{15}, \frac{8}{23} \Rightarrow \frac{46}{345}, \frac{120}{345}$
3. $\frac{9}{2}, \frac{9}{71} \Rightarrow \frac{639}{142}, \frac{18}{142}$
4. $\frac{1}{7}, \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{84}, \frac{56}{84}$
5. $\frac{1}{8}, \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{5}{40}, \frac{16}{40}$
6. $\frac{7}{2\sin x}, \frac{3}{2\cos x} \Rightarrow \frac{7\cos x}{2\sin x\cos x}, \frac{3\sin x}{2\sin x\cos x}$

7. $\frac{3t}{8a}, \frac{5a}{8t} \Rightarrow \frac{3t^2}{8at}, \frac{5a^2}{8at}$

8. $\dfrac{5\pi e^{\phi}}{4}, \dfrac{8}{9\pi} \Rightarrow \dfrac{45\pi^2 e^{\phi}}{36\pi}, \dfrac{32}{36\pi}$

9. $\dfrac{7x^2}{2}, \dfrac{3}{4x} \Rightarrow \dfrac{14x^3}{4x}, \dfrac{3}{4x}$

10. $\dfrac{9}{7a}, \dfrac{7}{9b} \Rightarrow \dfrac{81b}{63ab}, \dfrac{49a}{81ab}$

Aufgabe 3: Ordnen Sie der Größe nach!

1. $\frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{9}{6}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{9}, \frac{4}{5}, \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{8}, \frac{8}{12}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{5}{4}, \frac{9}{6}, \frac{7}{4}$
2. $\frac{4}{6}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3}, \frac{3}{1}, \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{9}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$
3. $\frac{13}{10}, \frac{7}{12}, \frac{9}{4}, \frac{13}{13}, \frac{14}{11}, \frac{15}{11}, \frac{11}{9}, \frac{9}{12}, \frac{11}{4}, \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{7}{12}, \frac{6}{10}, \frac{9}{12}, \frac{13}{13}, \frac{11}{9}, \frac{14}{11}, \frac{13}{10}, \frac{15}{11}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}$

1.3 Primfaktoren

Aufgabe 1: Finden Sie folgende Primfaktorzerlegungen! Es bietet sich an, einen Taschenrechner und eine Tabelle mit Primzahlen bis 100 zu benutzen.

1. $44880 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$
2. $5980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23$
3. $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$
4. $30132 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 31$
5. $1794 = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 23$
6. $5472 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 19$
7. $7400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 37$
8. $1815 = 3 \cdot 5 \cdot 11^2$
9. $16800 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
10. $6552 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$
11. $216200 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 47$
12. $83980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$
13. $669465 = 3^5 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 29$
14. $35400 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 59$
15. $19855 = 5 \cdot 11 \cdot 19^2$
16. $363440 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 59$
17. $310420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 83$
18. $704700 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 29$
19. $91195 = 5 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 61$
20. $27230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19$
21. $551862 = 2 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 43$
22. $21318 = 2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 51$
23. $346500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
24. $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$
25. $30240 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
26. $303600 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23$

Aufgabe 2: Ein Affe besitzt 500 Erdnüsse. Da er die nicht alleine essen kann, hat er 9 Freunde eingeladen, um zu teilen. Um Streit zu vermeiden, möchte er, dass die Nüsse gleichmäßig unter allen Anwesenden aufgeteilt werden. Dabei weiß er aber nicht, ob alle seine Freunde tatsächlich kommen werden. Seine Mutter bietet ihm an, falls er noch mehr Erdnüsse brauche, die restlichen aus ihrem Vorrat beizusteuern. Um wie viele Erdnüsse sollte der Affe seine Mutter bitten, damit es auf **keinen** Fall Streit gibt?

Es können bis zu 10 Affen anwesend sein. D.h., dass alle Zahlen bis einschließlich 10 Teiler der Anzahl der Nüsse sein sollten. Das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen von 1 bis 10 ist $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Daraus ergibt sich, dass der Affe seine Mutter um $2520 - 500 = 2020$ Nüsse bitten sollte.

1.4 Kleinstes Gemeinsames Vielfaches/ Größter Gemeinsamer Teiler

Aufgabe 1: Finden Sie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgv)!

1. $kgv(14, 2) = 14$
2. $kgv(4, 32) = 32$
3. $kgv(21, 5) = 105$
4. $kgv(40, 20) = 40$
5. $kgv(15, 13) = 195$
6. $kgv(19, 5) = 95$
7. $kgv(24, 20, 16) = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$
8. $kgv(39, 7, 13) = 273$
9. $kgv(30, 26, 38) = 7410 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$
10. $kgv(3, 22, 11) = 66$
11. $kgv(29, 27, 2) = 1566$
12. $kgv(24, 28, 37) = 6216 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$
13. $kgv(16, 6, 13, 21) = 4368 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$
14. $kgv(12, 40, 24, 29) = 3480 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$
15. $kgv(30, 20, 3, 11) = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

Aufgabe 2: Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggt)!

1. $ggt(12, 6) = 6$
2. $ggt(12, 40) = 4$
3. $ggt(100, 108) = 4$
4. $ggt(4, 86) = 2$
5. $ggt(52, 48) = 4$
6. $ggt(532, 736) = 4$
7. $ggt(543, 969) = 3$
8. $ggt(5, 530) = 5$
9. $ggt(839, 226) = 1$
10. $ggt(982, 841) = 1$
11. $ggt(250, 86, 826) = 2$
12. $ggt(612, 810, 504) = 18$
13. $ggt(451, 946, 99) = 11$
14. $ggt(180, 383, 49, 886) = 1$
15. $ggt(731, 68, 714, 357) = 17$

1.5 Bruchrechnung

Aufgabe 1: Berechnen Sie, ggf. kürzen Sie das Ergebnis!

1. $\frac{5}{2} + \frac{17}{14} = \frac{26}{7}$
2. $\frac{2}{3} + \frac{2}{22} = \frac{25}{33}$
3. $\frac{4}{5} - \frac{5}{8} = \frac{7}{40}$
4. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$
5. $\frac{7}{4} - \frac{4}{8} = \frac{5}{4}$
6. $\frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{37}{56}$
7. $\frac{3}{7} + \frac{7}{1} = \frac{52}{7}$
8. $4\frac{5}{9} - 2\frac{8}{7} = \frac{89}{63} = 1\frac{26}{63}$
9. $\frac{1}{5} - \frac{6}{7} = -\frac{23}{35}$
10. $\dfrac{43}{45} - \dfrac{42}{51} + \dfrac{41}{63} = \dfrac{4192}{5355}$
11. $\dfrac{6a}{8z} + \dfrac{7}{4z} = \dfrac{3a+7}{4z}$
12. $\dfrac{19}{8} + \dfrac{6}{30} = \dfrac{103}{40}$
13. $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{2\gamma} + \dfrac{0.5\alpha}{\dfrac{1}{\beta}} = \alpha\beta$
14. $\dfrac{5}{6}\pi + \dfrac{2}{7}\pi = \dfrac{47}{42}\pi$
15. $\dfrac{5(x+3)^2}{3(x+3)(x-3)} + \dfrac{3(x-3)^2}{4(x-3)(x-4)} = \dfrac{20(x+3)(x-4)+9(x-3)^2}{12(x-3)(x-4)}$
16. $\dfrac{4}{x} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{16-x^2}{4x}$
17. $\frac{17}{9} - \frac{13}{6} = -\frac{5}{18}$
18. $\frac{5}{8} - \frac{2}{7} = \frac{19}{56}$
19. $\dfrac{7}{2} - \dfrac{\frac{7}{3}\cdot 2\pi \cdot 9}{6\cdot 7\pi} = \dfrac{5}{2}$
20. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b-b^2}{b^2} = \dfrac{a+b-1}{b}$

Aufgabe 2: Füllen Sie die Lücken! [Hervorhebung der Lücken in Klammern]

1. $\frac{7}{2} \cdot \frac{[6]}{7} = 3$
2. $\frac{8}{[9]} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

3. $\frac{25}{18} \cdot \frac{27}{[15]} = \frac{5}{2}$

4. $\frac{8}{[9]} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

5. $\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{6} = \left[\frac{25}{42}\right]$

6. $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{8} = \left[\frac{27}{40}\right]$

7. $\left[\frac{7}{4}\right] \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{8}$

8. $\dfrac{8x}{5y} \cdot \left[\dfrac{10}{3y^2}\right] = \dfrac{16x}{3y^3}$

9. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{8}}{[\sqrt{6}]} = \dfrac{8}{3\sqrt{2}}$

10. $\frac{7}{[9]} \cdot \frac{3}{6} = \frac{7}{18}$

11. $\frac{7}{8} \cdot \left[\frac{3}{8}\right] = \frac{21}{64}$

12. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{9}{10} : \frac{11}{12} = \frac{1657}{2640}$

1.6 Binomische Formeln

Aufgabe 1: Wenden Sie die binomischen Formeln an!

1. $(9c + 8D)^2 = 81c^2 + 144cD + 64D^2$
2. $(a-9)(a+16) - \left(a + \frac{7}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{7}{4}\right)^2 = a^2 + 7a - 144 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{4} \cdot a = a^2 - 12^2 = (a+12)(a-12)$
3. $(5G - 6.55 \cdot 10^9)^2 = 25G^2 - 6.55 \cdot 10^{10}G + 42.9025 \cdot 10^{18}$
4. $(8\gamma - \Psi)^2 = 64\gamma^2 - 16\gamma\Psi + \Psi^2$
5. $n(\epsilon + \delta)(\delta - \epsilon) = n\delta^2 - n\epsilon^2$
6. $(c + d + e)^2 = c^2 + d^2 + e^2 + 2cd + 2ce + 2de$
7. $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ [Siehe Pascalsches Zahlendreieck]
8. $\left(x^n + x^{n-1}\right)^2 = x^{2n} + 2x^{2n-1} + x^{2n-2}$
9. $(1 + 2 + ... + n)^2 =$[Tipp: Wenden Sie ihre Lösung aus Aufgabe 7 an]
   $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + 2n\,(1 + 2 + ... + (n-1)) + 2(n-1)\,(1 + 2 + ... + (n-2)) + ... + 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1)$
   (Andere Lösung: $\dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4}$
   Warum das so ist, werden Sie in der Sektion zum Vereinfachen erarbeiten.)

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die folgenden Terme unter Zuhilfenahme der binomischen Formeln (ohne Taschenrechner)!

1. $13^2 - 7^2 = (13 + 7)(13 - 7) = 120$
2. $24.99^2 = \left(25 - \frac{1}{100}\right)^2 = 625 - \dfrac{2 \cdot 25}{100} + \dfrac{1}{100^2} = 624.5001$
3. $1.69^2 = \left(1.7 - \frac{1}{100}\right)^2 = 2.89 - 0.034 + \dfrac{1}{100^2} = 2.8561$
4. $11.2^2 = (11 + 0.2)^2 = 121 + 4.4 + 0.04 = 125.44$
5. $321^2 - 123^2 = (321 - 123)(321 + 123) = 198 \cdot 444 = 87912$
6. $5.05^2 = (5 + 0.05)^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 0.05 + 0.0025 = 25.5025$

1.7 Faktorisieren

Aufgabe 1: Faktorisieren Sie folgende Terme.

1. $x^2 + 14x + 45 = (x + 5)(x + 9)$
2. $9x^2 + 54x - 144 = 9(x + 8)(x - 2)$
3. $-5x^2 + 45x - 100 = -5(x - 4)(x - 5)$
4. $4x^2 - 4x - 24 = 4(x - 3)(x + 2)$
5. $x^2 - x - 72 = (x + 8)(x - 9)$
6. $2x^2 - 18x + 16 = 2(x - 1)(x - 8)$
7. $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$
8. $7x^2 + 77x + 168 = 7(x + 8)(x + 3)$
9. $-4x^2 + 12x + 112 = -4(x + 4)(x - 7)$
10. $-5x^2 - 55x - 150 = -5(x + 6)(x + 5)$
11. $x^2 + 9x - 136 = (x - 8)(x + 17)$
12. $10x^2 - 260x + 1600 = 10(x - 10)(x - 16)$
13. $-5x^2 - 115x - 510 = -5(x + 6)(x + 17)$
14. $8x^2 + 144x + 520 = 8(x + 5)(x + 13)$
15. $-9x^2 - 72x + 585 = -9(x - 5)(x + 13)$
16. $x^2 + 21x + 108 = (x + 9)(x + 12)$
17. $-x^2 - 14x + 147 = -(x - 7)(x + 21)$
18. $-7x^2 + 168x - 665 = -7(x - 5)(x - 19)$
19. $x^2 - 29x + 138 = (x - 6)(x - 23)$
20. $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$
21. $x^3 - 8x^2 - 100x + 800 = (x - 10)(x + 10)(x - 8)$
22. $x^3 + (b - c - d)x^2 + (cd - bc - bd)x + bcd = (x + b)(x - c)(x - d)$

Aufgabe 2 (für Fortgeschrittene): Wie müssen sich die Parameter m,n und o verhalten, damit sich

1. die erste
2. die zweite
3. die dritte

binomische Formel auf die Formel $ma^2 + nab + ob^2$ anwenden lassen?

In allen Fällen müssen m, o positiv sein.

1. $2\sqrt{m \cdot o} = n \Rightarrow ma^2 + nab + ob^2 = \left(\sqrt{m}a + \sqrt{o}b\right)^2$
2. $-2\sqrt{m \cdot o} = n \Rightarrow ma^2 + nab + ob^2 = \left(\sqrt{m}a - \sqrt{o}b\right)^2$
3. $n = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{m}a + \sqrt{o}b\right)\left(\sqrt{m}a - \sqrt{o}b\right) = ma^2 - ob^2$

1.8 Potenzen

Aufgabe 1: Berechnen Sie schnell & im Kopf.

1. $3^3 = 27$
2. $2^5 = 32$
3. $5^3 = 125$
4. $3^4 = 81$
5. $2^5 \cdot 3^5 = 7776$
6. $3^3 \cdot 5^2 = \frac{2700}{4} = 675$
7. $2^3 \cdot 3^2 = 72$
8. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
9. $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$
10. $2^4 \cdot 3^2 = 12^2 = 144$
11. $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$
12. $2^5 \cdot 6 = 192$

Aufgabe 2: Vereinfachen Sie!

1. $\left(a^5 + a^7\right)^{2+3^2} = \left(a^5 + a^7\right)^{11}$
2. $(2^c + 2^c)^{2^c} = 2^{(c+1)^{2c}} = 2^{2c^2+2c}$
3. $\frac{14^6}{49^5} = \frac{2^6}{7^4}$
4. $\dfrac{\left(3^6 \cdot 11^3\right)^7 \cdot \left(2 \cdot 5^3\right)^6}{\left(6^2 \cdot (45)^6 \cdot 11^7\right)^3} = 1$
5. $\dfrac{9^3 \cdot 5^{6\pi} \cdot 14^2 \cdot 8 \cdot 2019}{4 \cdot \left(\sqrt[\pi]{2} \cdot \sqrt[4]{5^8}\right)^{3\pi} \cdot 673 \cdot 147} = 9^3 = 729$
6. $\dfrac{mA^3n^2n^3\,(He)^5\,iM^2}{RH^2e^7in^5 \cdot (Ne^{11}c^{-1}K^{-3}AR^{-1})^2} = \dfrac{mAH^3M^2Rc^2K^6}{e^{24}N^2}$
7. $(3^3 \cdot 3^4 + 3^5 - 3^8 : 3^4 + 3^3 - \sqrt{3^5} \cdot 3^{\frac{7}{2}}) : 3 = 3^6 + 3^4 - 3^3 + 3^2 - 3^5 = 549$
8. $\dfrac{18 \cdot 2^4 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 12}{22 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 19} = \dfrac{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5}{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 19} = \dfrac{2^9}{11 \cdot 5 \cdot 19} = \dfrac{512}{1045}$
9. $\dfrac{\left(2^3 + 2^5\right)^3 \cdot 5^{-0.5}}{\sqrt{8}} = 40^{\frac{5}{2}}$
10. $\left[\left(x^2 + 2xy\right)(x-z)^2 + (zy)^2 + x^2y^2 - 2xy^2z\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(x^2 + 2xy\right)(x-z)^2 + y^2(x-z)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[(x+y)^2(x-z)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(x+y)(x-z)}$

1.9 Wurzeln

Aufgabe 1: Lösen, ggf. vereinfachen Sie!

1. $\sqrt{169} = 13$
2. $\sqrt{0.04} = 0.2$
3. $\sqrt{576} = 24$
4. $\sqrt{0.0196} = 0.14$
5. $\sqrt{2116} = 46$
6. $\sqrt{888} = 2\sqrt{222}$
7. $\sqrt{\frac{625}{729}} = \frac{25}{27}$
8. $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$
9. $\sqrt{\frac{484}{900}} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$
10. $\sqrt{567} = 9\sqrt{7}$
11. $\sqrt{0.000625} = \frac{1}{40}$
12. $\sqrt{\frac{441}{115600}} = \frac{21}{340}$

Aufgabe 2: Füllen Sie die Tabelle aus! Alle Elemente sind natürliche Zahlen.

a	[4]	5	1	[3]	6	[2]
$\sqrt[a]{a^2-1}$	$\sqrt[4]{15}$	[$\sqrt[5]{24}$]	[0]	2	[$\sqrt[6]{35}$]	$\sqrt{3}$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgende Gleichungen! Zusätzliche Bedingung seien $x, y \in \mathbf{N}$; $x, y \in [0, 9]$

1. $\sqrt{200 + 10x + 5} = 15 \Rightarrow x = 2$
2. $\sqrt{100x + 61} = 19 \Rightarrow x = 3$
3. $\sqrt{100 + 4(x + 4)} = 14 \Rightarrow x = 20$ also keine Lösung
4. $\sqrt{100 + 20x + y} = 10 + x \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = 4; x_3 = 3, y_3 = 9$ (aus der Gleichung ergibt sich $y = x^2$, die konkreten Ergebnisse ergeben sich aus den zusätzlichen Bedingungen (s.o.))

Aufgabe 4: Finden Sie l und v! Nutzen Sie dafür einen Taschenrechner.

$m = 12kg$
$g = 9.81\frac{m}{s^2}$
$h = 10m$
$D = 5\frac{N}{m} = 5\frac{kg \cdot m}{s^2}$

$W = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}D \cdot l^2 = \frac{1}{2}m \cdot v^2$

Lösung: $l = \sqrt{470.88m^2} \approx 21.6997m, v = \sqrt{196.2\frac{m^2}{s^2}} \approx 14.0071\frac{m}{s}$

Aufgabe 5 (Achtung, schwer): Vereinfachen Sie so, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht!

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2}{2-\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}-3} = \frac{-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}-12} = \frac{1}{-5+2\sqrt{6}} = \frac{1}{-5+2\sqrt{6}} \cdot \frac{-5-2\sqrt{6}}{-5-2\sqrt{6}} = \frac{-5-2\sqrt{6}}{5^2-2^2\cdot\sqrt{6}^2}$$
$$= -5-2\sqrt{6}$$

Aufgabe 6: Im antiken Griechenland gab es einen würfelförmigen Altar mit dem Volumen einer Kubikelle. Ein Orakel rät, um den bevorstehenden Krieg zu gewinnen, einen zweiten Altar zu bauen. Dieser soll aber genau das doppelte Volumen haben wie der schon bestehende Altar, aber immer noch in der Form eines Würfels sein. Kommentieren Sie über die Erfolgsaussichten dieser Unternehmung!

Die Kantenlängen l des neuen Altars ergibt sich aus dem Volumen (2 Kubikellen): $l = \sqrt[3]{2}$ Ellen$\approx 1,2599$. Dies ist eine irrationale Zahl. Daher ist diese Unternehmung zum Scheitern verurteilt, da man eine Strecke von irrationaler Länge nicht genau abmessen kann. Im übrigen verloren diese Griechen den Krieg- ob der Altar einen Unterschied gemacht hätte, kann heute leider keiner mehr nachprüfen.

1.10 Logarithmen

Aufgabe 1: Vereinfachen Sie!

1. $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$
2. $\log_c a - \log_c b = \log_c(\frac{a}{b})$
3. $t \log_c a = \log_c(a^t)$
4. $\frac{1}{t} \log_c a = \log_c \sqrt[t]{a}$
5. $\dfrac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$
6. $\ln e^3 = 3$
7. $\ln e^{\ln 3} = \ln 3$
8. $\ln(27e^{3\ln 3}) = \ln\left(\left(3e^{\ln 3}\right)^3\right) = 6\ln 3$
9. $\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\ln x$
10. $\ln e^{-\left(x^2\right)} = -x^2$
11. $\ln\left(x^2-1\right) + \ln\left(x^2-1\right) = 2\ln((x-1)(x+1))$
12. $e^{e^{\ln e^{\ln e^{\ln e^5 - 1}}}} = e^{e^4}$
13. $2^{(\log_3 4)^{(\log_2 3)}} = 2,7241$
14. $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$
15. $\ln(10e^{5x}-8) - \dfrac{1}{\log_2 e} = \ln(10e^{5x}-8) - \dfrac{\log_2 2}{\log_2 e} = \ln\left(10e^{5x}-8\right) - \ln 2 = \ln(5e^{5x}-4)$
16. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ Dies ist ein Weg, um e zu bestimmen. Tippen Sie zum Vergleich einfach die Funktion für eine große Zahl (z.B. 1000) ein, und zieht e davon ab. Es wird eine Zahl ganz nahe bei 0 herauskommen (der Rest sind Rundungsfehler). Falls es Sie mehr interessiert, warum da e herauskommt, schauen Sie einfach bei Wikipedia im Artikel Ëxponentialfunktionünter "Hintergründe und Beweisenach.
17. $\ln(x+4) + \ln(x+4) - \ln x + \ln\dfrac{1}{4} = \ln\left(\dfrac{(x+4)^2}{4x}\right)$
18. $\ln e^{ax^2+bx+c} \cdot \ln e^x = ax^3 + bx^2 + cx$
19. $\ln\frac{\sqrt[3]{e}}{\alpha} = \frac{1}{3} - \ln\alpha$
20. $g(x) = \ln(ae^{\kappa f(x)}) \pm \ln(be^{\kappa h(x)})$
    $\Rightarrow g_1(x) = \ln\left[(ae^{\kappa f(x)})(be^{\kappa h(x)})\right]$,
    $g_2(x) = \ln\dfrac{ae^{\kappa f(x)}}{be^{\kappa h(x)}}$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Gleichungen nach x auf!

1. $\log_2 x^3 = 5 \Rightarrow x = 2^{\frac{5}{3}}$

2. $\log_{\frac{1}{2}} x^3 = 5 \Rightarrow x = 2^{-\frac{5}{3}}$

3. $\ln(7x-13) = 0 \Rightarrow x = 2$

4. $\log_{\frac{1}{x}} a = c \Rightarrow x = \sqrt[c]{\frac{1}{a}}$

5. $2\ln x - \ln(3+x) - \ln(x-3) = -\ln\frac{7}{16}$
$$\left[= \ln\frac{x^2}{x^2-9} = \ln\frac{1}{1-\dfrac{9}{x^2}} = \ln\frac{1}{\dfrac{7}{16}}\right]$$
$\Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 4$

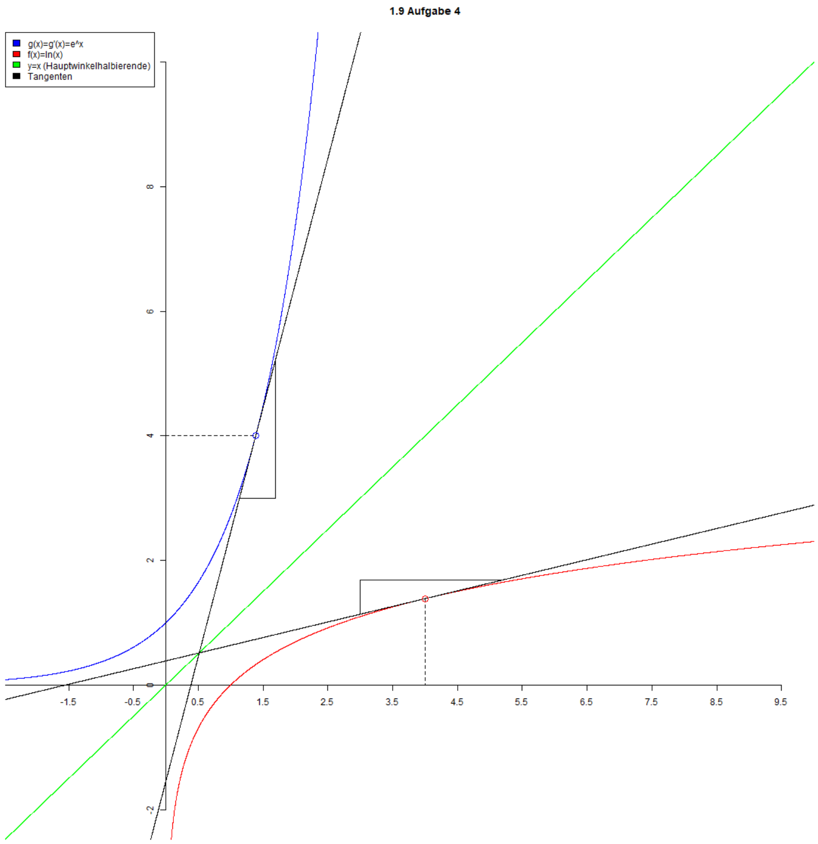
6. $\ln 1 = \ln\sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Aufgabe 3: Die Ableitung einer Funktion $f(x) = a^x$ sei $f'(x) = \sqrt{a}\cdot a^x$.
Bestimmen Sie a!

Gemäß Ableitungsregeln muss gelten $f'(x) = \ln a \cdot a^x \Rightarrow \ln a = \sqrt{a}$. Dies ist aber ein Widerspruch, $\sqrt{a}$ schneidet niemals $\ln a$, denn $\sqrt{x} > \ln x$ für alle $x > 0$.

Aufgabe 4 (Achtung, schwer): Zeichnen Sie eine Skizze, um zu beweisen, dass $f'(x) = \frac{1}{x}$ für eine Funktion $f(x) = \ln x$ gelten muss. **Tipp**: Benutzen Sie die Ableitung Basis der Exponentialfunktion e^x; skizzieren Sie $f(x) = \ln x$ und $g(x) = g'(x) = e^x$, hilfreich ist ebenfalls die Hauptwinkelhalbierende $y = x$.

Die Funktion $\ln x$ ist eine Spiegelung der Funktion e^x an der Hauptwinkelhalbierenden. Daraus folgt, dass die Steigung des Logarithmusfunktion an der Stelle $x = a$ den Kehrwert der Steigung der Exponentialfunktion an der Stelle $y = a$ annimmt. Mit anderen Worten, wenn sie vom Ursprung eine Stück auf der Y-Achse entlangwandern und dann die Steigung der Exponentialfunktion an dieser Stelle messen, nimmt sie den Kehrwert der Steigung an, die Sie messen würden wenn Sie auf der X-Achse entlanggegangen wären und die Steigung der Logarithmusfunktion gemessen hätten.
Für die Länge des Stücks, dass wir auf den Achsen wandern, wählen wir x. Somit hat der betroffene Punkt auf der Exponentialfunktion die Koordinate $A(\ln x|x)$, und der betroffene Punkt auf der Logarithmusfunktion $B(x|\ln x)$. Für die Steigung der Exponentialfunktion am Punkt A gilt $g'(\ln x) = e^{\ln x} = x$. Da die Steigung der Logarithmusfunktion an der Stelle B den Kehrwert der Steigung der Exponentialfunktion an der Stelle A annimmt, gilt für den (arbiträr wählbaren) Punkt B eine Steigung von $f'(x) = (g'(x))^{-1} = \frac{1}{x}$.


1.9 Aufgabe 4
g(x)=g'(x)=e^x
f(x)=ln(x)
y=x (Hauptwinkelhalbierende)
Tangenten
8
6
4
2
0
-2
-1.5
-0.5
0.5
1.5
2.5
3.5
4.5
5.5
6.5
7.5
8.5
9.5

1.11 Vereinfachen

Aufgabe 1: Vereinfachen Sie!

1. $(1-q)\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}\right)=\left(1-q+q-q^2+q^2-q^3+...+q^{n-1}-q^n\right)=1-q^n$
2. $\dfrac{ax^2y^2+bx^{\frac{5}{2}}y+c^2xy}{ab^2xy+x(2yab+yac^2)}=\dfrac{axy+bx^{\frac{3}{2}}+c^2}{a\left(b^2+2b+c^2\right)}$
3. $\dfrac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}=\dfrac{2ahx+ah^2+bh}{h}=2ax+b+ha$
4. $e^{\dfrac{2yx^3-2x}{2xy}}=e^{x^2-\frac{1}{y}}$
5. $a^{a^c b^{-x} a^x \cdot \log_{\frac{1}{a}} x}=a^{\left(a^{c+x}b^{-x}\right)\cdot \log_a \frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{a^{c+x}}{b^x}}}$
6. $\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}(yx+1)}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}+y+\frac{1}{x}$
7. $\ln x^2+\ln x-\ln(-x)=\ln\dfrac{x^3}{-x}=\ln\left(-x^2\right)$
8. $(1+2+3+...+n)$ Tipp: Sie können ausklammern, wenn Sie eine bestimmbare Anzahl gleicher Elemente haben$\Rightarrow$ Finden Sie, d.h. formen Sie, gleiche Elemente! $=((1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+$
$\dfrac{(n+1)n}{2}$
9. $\dfrac{\left(4(\kappa+1)+\kappa^2\right)\left(\kappa^2+4(1-\kappa)\right)}{\kappa^3+4\kappa^2-4\kappa-16}=\dfrac{(\kappa+2)^2(\kappa-2)^2}{(\kappa+2)(\kappa-2)(\kappa+4)}=\dfrac{\kappa^2-4}{\kappa+4}$
10. $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$
11. $\sqrt{n^{-1}}m^2\sqrt{m^{\log_m n^3}}m^{\frac{1}{3}}n^{x^2}n^{x2}=m^{\frac{7}{3}}n^{\frac{2}{2}}n^{x^2}n^{2x}=m^{\frac{7}{3}}n^{(x+1)^2}$
12. $\sqrt{\left(e^d\right)^x+a^2+x(b-c^2)+x(c^2-b)-\left(e^x\right)^{\ln e\cdot d}}=a$
13. Denken Sie an eine Zahl. Addieren Sie 1, quadrieren Sie dies nun und verdoppeln Sie das Ergebnis danach. Ziehen Sie nun das Quadrat der ursprünglichen Zahl ab und addieren sie 2 dazu. Quadrieren Sie das Ergebnis.
Wie lässt sich dieser Auftrag vereinfachen?
$\left[2\,(x+1)^2-x^2+2\right]^2=\left(x^2+4x+4\right)^2=(x+2)^4$
14. (Achtung, schwer) $\dfrac{u\sqrt{n}-u-\sqrt{u^3}}{\sqrt{nu}+u\sqrt{u}}+\dfrac{\sqrt{n}+u+\sqrt{u^3n}}{n+u\sqrt{n}}=$
$\dfrac{\sqrt{nu}-\sqrt{u}-u}{\sqrt{n}+u}+\dfrac{1+\dfrac{u}{\sqrt{n}}+u\sqrt{u}}{\sqrt{n}+u}=$
$\dfrac{1+\sqrt{nu}-\sqrt{n}+\dfrac{u}{\sqrt{n}}+u\sqrt{u}-u}{\sqrt{n}+u}=$
$\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{u}-1\right)\left(\dfrac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}+u}\right)=$
$\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{u}-1$

2 Lösungen Mengenlehre

Aufgabe 1:

1. 3
2. 10
3. ∞
4. 3
5. 10
6. 2

Aufgabe 2:

1. $\wp(Y) = \{\emptyset, 0, 1, \{0, 1\}\} \Rightarrow$ 4 Elemente
2. $\wp(W) = \{\emptyset, 10, 11, 12, 13, \{10, 11\}, ..., \{10, 11, 12, 13\}\} \Rightarrow$ 16 Elemente
3. $\wp(X) = \{\emptyset, 0, 1, ..., \{0, 1\}, ..., \{0, 1, 10, 11, 12, 13\}\} \Rightarrow$ 64 Elemente
4. $\wp(R) = \{\emptyset\} \Rightarrow$ 1 Element
5. $\wp(L) = \{\emptyset, a, b, c, ..., \{a, b, c\}\} \Rightarrow$ 8 Elemente

Aufgabe 3:

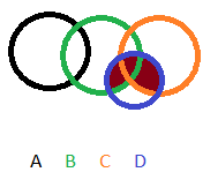
1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
2. $\{1, 2, 5, 7\}$
3. $\emptyset$ oder $\{\ \}$
4. $\{1, 2, 4, 5, 7, 9, 10\}$
5. $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$
6. $\{1, 2\}$
7. $\{5, 7\}$
8. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
9. $\{0, 1, 2, 3, 6, 8\}$
10. $\{(0, x), (0, y), (1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$

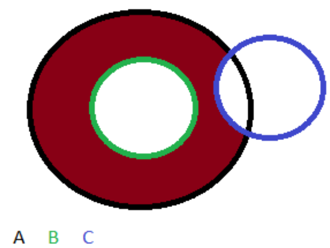
Aufgabe 4:

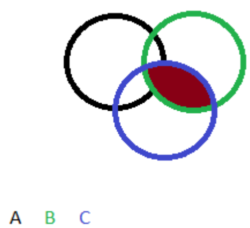
1. Richtig
2. Richtig
3. Richtig

4. Falsch
5. Falsch
6. Falsch
7. Falsch
8. Falsch
9. Falsch
10. Richtig

Aufgabe 5: Die erfragten Flächen wurden rot markiert.







3 Ableitungen

3.1 Einfache Ableitungen

Aufgabe 1: Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = 5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0$
2. $f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1$
3. $f(x) = 5x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 5$
4. $g(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x$
5. $f(x) = 4x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 12x^2$
6. $f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
7. $f(x) = -\frac{4}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{8}{x^3}$
8. $f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x$
9. $f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
11. $f(x) = \sqrt[8]{x^2} = x^{\frac{1}{4}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

Aufgabe 2: Bilden sie die zweite Ableitung!

1. $f(x) = 5 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 0$
2. $f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 0$
3. $f(x) = 5x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 0$
4. $g(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 2$
5. $f(x) = 4x^3 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 24x$
6. $f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}$
7. $f(x) = -\frac{4}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = -\frac{24}{x^4}$
8. $f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = e^x$
9. $f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$
11. $f(x) = \sqrt[8]{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{16\sqrt[4]{x^7}}$

3.2 Summenregel

Aufgabe 3: Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = 4x^2 - 3x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 8x - 3$
2. $f(x) = \frac{3}{x} + 4x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} + 12x^2$
3. $f(x) = e^x + \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$

3.3 Produktregel

Aufgabe 4: Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = e^x 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x 4x^2 + e^x 8x = 4xe^x(x+2)$
2. $f(x) = a^2x^4 \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4a^2x^3 \ln x + a^2x^4\frac{1}{x} = a^2x^3(4\ln x + 1)$
3. $f(x) = a^x \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (\ln a)a^x \ln x + a^x \frac{1}{x}$
4. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}e^x + x^{\frac{1}{3}}e^x = e^x x^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3x} + 1)$

3.4 Quotientenregel

Aufgabe 5: Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = \frac{4x^2+1}{3x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{8x3x-(4x^2+1)3}{(3x)^2} = \frac{4x^2-1}{3x^2}$
2. $f(x) = \frac{e^x}{\ln x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x \ln x - e^x \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$
3. $f(x) = \frac{4x^2e^x}{4x^4-1} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{(8xe^x+4x^2e^x)(4x^4-1)-4x^2e^x16x^3}{(4x^4-1)^2} = \frac{e^x(-32x^5+16x^6-8x-4x^2)}{(4x^4-1)^2}$
4. $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2+1} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)-x^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^2}$

3.5 Kettenregel

Aufgabe 6: Bilden sie die erste Ableitung!

1. $f(x) = e^{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2xe^{x^2}$
2. $f(x) = (x^3 - 4x)^4 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4(x^3 - 4x)^3(3x^2 - 4)$
3. $f(x) = (3x^4 - 5)^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}(3x^4 - 5)^{-\frac{1}{2}}12x^3$
4. $f(x) = e^{\ln x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^{\ln x^2}\frac{1}{x^2}2x = 2x$ (Notiz: $e^{\ln x^2} = x^2$)

4 Lösungen Funktionen und Ableitungen mit einer unabhängigen Variablen

Aufgabe 1:

1. $f'(x) = 52x^3 + 10x$
2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 42x^2 + \dfrac{2}{x}$
3. $f'(x) = -\dfrac{1}{4x^2}$
4. $f'(x) = 12x - 1$
5. $f'(x) = \ln(x) + 1$
6. $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
7. $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x} \cdot \left(-\frac{1}{x} + 5\right)$
8. $f'(x) = -1 - \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$
9. $f'(x) = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x$
10. $f'(x) = -\sin(2x+1) \cdot 2$
11. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
12. $f'(x) = -\dfrac{4}{(2x-1)^2}$
13. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$
14. $f'(x) = e^x$
15. $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$
16. $f'(x) = \frac{1}{2x}$

Aufgabe 2:

1. $f'(x) = 18x^2 + x4 - 4$
   $f''(x) = 36x + 4$
2. $f'(x) = \frac{5}{x}$
   $f''(x) = -\frac{5}{x^2}$
3. $f'(x) = 6x^5 + \dfrac{3}{2x^2}$
   $f''(x) = 30x^4 - \dfrac{3}{x^3}$

Aufgabe 3:

	$f(0)$	x_1	x_2	x_3	x_4
1.	-4	-2.853	2.103		
2.	9	-1.5	-0.5	0.5	1.5
3.	0	-2	0	2	
4.	≈ 0.5	0.047	4.236	6.33	

Aufgabe 4:

1. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
   $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

2. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
   $\mathbb{W} = [3, \infty]$

3. $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$
   $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

4. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
   $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

6. $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
   $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

7. $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

8. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
   $\mathbb{W} = [-1, 1]$

9. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
   $\mathbb{W} = [-1, 1]$

10. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
    $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

11. $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
    $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

5 Lösungen Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 1:

1. $x = 5$
2. $x = 3$
3. $x = -3$
4. $x = 6$
5. $x = \frac{1}{3}$
6. $x = -\frac{1}{12}$
7. $x = -15$
8. $x = 36$

Aufgabe 2:

1. $x_1 = 2 \wedge x_2 = -2$
2. $x_1 = -5 \wedge x_2 = 2$
3. $x = 2$
4. $x_1 = -\frac{1}{2} \wedge x_2 = \frac{1}{2}$
5. $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$
6. $x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{1}{3}$

Aufgabe 3:

1. $x = \sqrt[3]{\frac{35}{8}}$
2. $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$
3. $x = 2$
4. $x = 3$
5. $x = 3$
6. $x = 5$

Aufgabe 4:

1. $x = 2$
2. $x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{9}{5}$
3. $x = 4$
4. $x = 16$

5. $x = 3$
6. $x = 3$
7. $x = 30$
8. $x = 81$
9. $x = 4$
10. $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$

Aufgabe 5:

1. $\mathbb{L} = \{(-\infty, 1)\}$
2. $\mathbb{L} = \{(-\infty, \frac{4}{3}]\}$
3. $\mathbb{L} = \{[\frac{2}{9}, \infty)\}$
4. $\mathbb{L} = \{[-4, \infty)\}$
5. $\mathbb{L} = \{(-\infty, 1)\}$
6. $\mathbb{L} = \begin{cases} (-\infty, \frac{3}{c}) & falls \ : c > 0 \\ \emptyset & falls \ : c = 0 \\ (\frac{3}{c}, \infty) & falls \ : c < 0 \end{cases}$

Aufgabe 6:

1. $\mathbb{L} = \{(-1, \infty) \cup (-\infty, -\frac{5}{7})\} = \{(-\infty, \infty)\}$
2. $\mathbb{L} = \{-\infty, \frac{4}{9}\}$
3. $\mathbb{L} = \{(3, \infty)\}$

6 Lösungen Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1:

Einfache Aufgaben

	x	y
1.	19	-1
2.	7	22
3.	10	-17
4.	-7	-15
5.	26	-5
6.	15	25
7.	-3	-10
8.	-4	-2

Normale Aufgaben

	x	y
1.	17	28
2.	$\mathbb{L} = \{(x, y) \,\vert x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{1}{2}x + 14\}$	
3.	$\mathbb{L} = \{\emptyset\}$	
4.	8	0
5.	$\frac{373}{16}$	$\frac{125}{4}$
6.	$\mathbb{L} = \{(x, y) \,\vert x \in \mathbb{R} \wedge y = -3x - 7\}$	
7.	$\mathbb{L} = \{\emptyset\}$	
8.	0	0

Aufgabe 2:

Ein einfacher Weg, um Graphen schnell zu zeichnen ist durch Google. Gehen Sie auf google.de und geben Sie „plot “und dahinter die Funktion ein.

Umgeformt nach y ergeben die Gleichungen:

1. $y = 3x + 1 \wedge y = x + 15$
2. $y = -10x \wedge y = 12x$
3. $y = \frac{1}{2}x + 14$ für beide Funktionen
4. $y = 10x - 3 \wedge y = 10x - 9$

Darstellung des ersten Funktionspaars in Google: Eingabe von „plot y=3x+1 and y=x+15“

Die Beispiele zeigen, dass man ein LGS mit Geraden darstellen kann. Die Geraden sind „Bedingungen “, die erfüllt werden müssen. Beide Bedingungen werden in den ersten beiden Beispielen erfüllt an dem Punkt, wo sich beide Geraden schneiden. Der Schnittpunkt dieser Geraden markiert die Lösung des LGS. Im dritten Beispiel sind die „Bedingungen “identisch, und jeder Punkt der die Bedingungen erfüllt, d.h. auf den identischen zwei Geraden liegt, ist eine Lösung für das LGS. Im vierten Beispiel schneiden sich beide Geraden nicht, da sie parallel sind. Kein Punkt im Koordinatensystem erfüllt beide Bedingungen, daher ist die Lösungsmenge leer.

Aufgabe 3: Dieses Gleichungssystem zu lösen ist vielleicht mathematisch nicht unmöglich, praktisch aber schon. Zur Erläuterung ein Beispiel: Zwei Frauen arbeiten in der gleichen Stadt in der gleichen Position mit dem gleichen Bildungsabschluss, der gleichen Berufserfahrung und wöchentlichen

Stundenzahl. Vielleicht sind beide Gehälter gleich, aber niemand würde sich wundern wenn sie sich unterscheiden würden: Vielleicht zahlen beide Unternehmen unterschiedlich gut? Vielleicht gibt es noch andere Faktoren, die nicht erfasst werden, die Einfluss nehmen, wie z.B. Alter oder wie gut sie ihre Arbeit verrichten, oder gar Diskriminierung?
Daher ist es in der Praxis unmöglich, dieses LGS zu lösen. Natürlich haben schlaue Ökonomen aber auch dafür Lösungen gefunden, die Sie in den kommenden Semestern kennenlernen werden...

7 Lösungen Lineare Algebra

1. $e_1 \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$

2. $\overrightarrow{0} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = 0$

3. $a_{31} = 3 \quad \wedge \quad a_{12} = 6$

4. $z^T = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

5. $m^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\alpha w = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. $\alpha x = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

8. $\alpha\,(w + x) = \alpha w + \alpha x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \end{pmatrix}$

   Zweck dieser Aufgabe war es, das Distributivgesetz auf Vektoren anzuwenden. Vier und Zehn zu addieren konnten Sie (hoffentlich) schon.

9. $\beta y + z = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{27}{3} \\ \frac{33}{3} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} \\ \frac{31}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$

10. $w \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 17$

11. $\|z\| = \sqrt{9^2 + 11^2 + 4^2} \approx 14.76$

12. $yz^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 11 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 4 \\ -18 & -22 & -8 \\ 27 & 33 & 12 \end{bmatrix}$

13. $x^T x = \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2 + 7^2 \end{pmatrix} = 74$ Dies ist eine $1x1$-Matrix.

14. $y^T m y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
    $= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -8 \end{pmatrix}$
    $= -10 - 40 - 24$
    $= -74$

    Dies nennt man eine quadratische Form. Dies wird in Ihrem Studium noch häufiger auftauchen.