

# Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration

## — The Law of Population Concentration —

By Felix Auerbach, 1913, published in Petermanns Geographische Mitteilungen

— Translation and introduction by Antonio Ciccone\* —

### Abstract

I translate Felix Auerbach's short 1913 article *Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration* to English. In this article Auerbach argues that the number of cities of size greater or equal  $p$  is inversely proportional to  $p$ . This relationship later became known as Zipf's law for cities. I also provide a brief introduction and use Auerbach's data to plot the  $\log(\text{rank})$  of German cities in 1910 against their  $\log(\text{population})$ .

---

\*University of Mannheim and CEPR. Email: antonio.ciccone@uni-mannheim.de. March 2021. I thank Gilles Duranton, Xavier Gabaix, Benjamin Moll, and Diego Rybski for their comments and suggestions.

# Introduction

In his short article in 1913, the physicist Felix Auerbach argues that the city size distributions of Germany,<sup>1</sup> Great Britain, the U.S.A. etc. approximately satisfy the equation  $n_p p = k$  where  $k$  is a constant and  $n_p$  is the rank of the city with population  $p$  when cities are ranked by population from largest to smallest.<sup>2</sup> Auerbach's argument is based on a graph where he plots the rank-population product of cities  $n_p p$  on the vertical axis against their rank  $n_p$  on the horizontal axis and finds that, from some relatively small value for  $n_p$  onward,  $n_p p$  fluctuates within a narrow range around a constant value. Auerbach then points out that  $n_p p = k$  implies that the number of cities of size larger or equal  $p$  is inversely proportional to  $p$ . This follows from the fact that the rank  $n_p$  of a city with population  $p$  is also the number of cities with population larger or equal  $p$  and that  $n_p p = k$  implies that  $n_p = k p^{-1}$ . I use Auerbach's data for German cities in 1910 and plot  $\log n_p$  on the vertical axis against  $\log p$  on the horizontal axis to see whether the data indicates a slope equal to  $-1$  as should be if  $n_p = k p^{-1}$ , see figure 4. Such log plots are commonly employed in the modern literature to examine this issue (e.g. Gabaix, 1999).<sup>3</sup> I find an ordinary-least-squares regression slope that is somewhat smaller than  $-1$  ( $-1.15$  with a standard error of  $0.03$ ).<sup>4</sup>

Later the relationship between  $n_p$  and  $p$  that Auerbach argues holds for city size distributions became known as Zipf's law for cities, named after the linguist and philologist George Kingsley Zipf who discussed a wide range of applications of power laws—including their application to city size distributions (Zipf, 1949).<sup>5</sup> Zipf recognized Auerbach's earlier contribution, see the short biography of Auerbach by Diego Rybski (Rybski, 2013).<sup>6</sup> Zipf's law for cities states that the probability  $Q(p)$  that a city has a population size larger or equal  $p$  is given by  $Q(p) = k p^{-\eta}$  with  $\eta \approx 1$  (e.g. Gabaix, 1999). This expression for  $Q(p)$  can be rewritten as  $Q(p)p = k^{1/\eta} Q(p)^{(\eta-1)/\eta}$ . As a result,  $\eta \approx 1$  is equivalent to there being no relationship or only a weak relationship between  $Q(p)p$  on the one hand and  $Q(p)$  on the other. Auerbach's graphical argument is meant to establish that there is no such relationship for the discrete city size distributions he examines—at least outside the 20 or so largest cities.<sup>7</sup>

Auerbach's article was written in German and—although his contribution is widely recognized in the modern literature<sup>8</sup>—never translated to the best of my knowledge. Below I translate Auerbach's original article using a somewhat different, more modern, language where I think it useful. To facilitate comparison, the original German text is next to the translation. I also reproduce the figures of Auerbach with English explanations of some key information.<sup>9</sup>

---

<sup>1</sup>I am using Germany as an abbreviation for Imperial State of Germany, the official name of the country until 1918.

<sup>2</sup>*Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration* Petermanns Geographische Mitteilungen, 59, 74-76, 1913.

<sup>3</sup>Xavier Gabaix, *Zipf's Law for Cities: An Explanation*, Quarterly Journal of Economics, 114(3), 739-767, 1999.

<sup>4</sup>Implicitly, Auerbach's graphical argument leading him to conclude that  $n_p = k p^{-1}$ , or equivalently  $\log n_p = \log k - 1 \log p$ , puts greater weight on cities outside the top-20 or so. On the other hand, the regression line in figure 4, which is the basis of the log-log ordinary-least-squares slope estimate of  $-1.15$ , weights all cities equally. The slope would be closer to  $-1$  if only cities with rank 20 ( $\log(\text{rank}) = 3$ ) or lower were included in the regression.

<sup>5</sup>*Human Behaviour and the Principle of Least Effort*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1949.

<sup>6</sup>*Auerbach's Legacy*. Environment and Planning A, 45, 1266-1268, 2013.

<sup>7</sup>As  $n_p p$  on the vertical axis of his graphs is proportional to  $Q(p)p$  and  $n_p$  on the horizontal axis is proportional to  $Q(p)$ .

<sup>8</sup>For example, see Gabaix (1999); Yannis Ioannides and Henry Overman, *Zipf's Law for Cities: An Empirical Examination*, Regional Science and Urban Economics, 33(2), 127-137, 2003; Gilles Duranton, *Some Foundations for Zipf's Law: Product Proliferation and Local Spillovers*, Regional Science and Urban Economics, 36(4), 542-63, 2006; and Esteban Rossi-Hansberg and Mark L.J. Wright (2007) *Urban Structure and Growth*, Review of Economic Studies, 74(2), 597-624, 2007.

<sup>9</sup>The figures (net of the English annotations in blue) were provided by the Thüringer Landes- und Universitätsbibliothek Jena and are licensed under the creative commons license CC0 1.0.

# Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration

Felix Auerbach

Die Tatsachen des Menschenlebens scheinen sich auf den ersten Blick nicht, wie die Erscheinungen der Natur, bestimmten, allgemeinen Gesetzen unterzuordnen. Indessen lehrt uns die Statistik, daß das eben nur ein gradueller Unterschied ist, bedingt durch die größere Komplikation der Verhältnisse, und daß man nur die Zahlen der Statistik richtig zu lesen lernen muß, um allgemeinere Schlüsse ziehen zu können; und es ergeben sich dabei nicht selten interessante und merkwürdige Gesetze.

Ein derartiges auf die Bevölkerungsstatistik bezügliche Gesetz soll hier aufgestellt und an Beispielen erläutert werden; zugleich wird dieses Gesetz die Möglichkeit liefern, die verschiedenen Komplexe, z.B. die verschiedenen Staaten, hinsichtlich ihrer Besiedlungsverhältnisse auf eine neue und, wenigstens in mancher Hinsicht, treffendere Art zu charakterisieren, als das bisher möglich war.

Die Bevölkerung eines Gebiets zeigt die verschiedensten Verteilungsformen, von einzelnen Gehöften zu Kolonien, Dörfern, Städten bis hinauf zu den Weltstädten. Weltstädte gibt es auf der ganzen Erde nur wenige und in vielen Staaten keine einzige, Großstädte gibt es schon erheblich mehr, von Mittelstädten gibt es eine große Zahl, und die Zahl der Kleinstädte, Landstädte und Dörfer geht in die Hunderte und Tausende. Im Deutschen Reich z. B. gibt es eine oder, wenn man topographisch, nicht amtlich rechnet, zwei Weltstädte, rund 50 Großstädte, mehr als 200 Kleinstädte, mehr als 2000 Landstädte und nahezu 100000 Dörfer.

Wir wollen nun die Orte eines Staates (oder einer Provinz, oder eines Erdteils usw.) nach ihrer Einwohnerzahl ordnen und mit Rangnummern, von 1 angefangen, versehen; wir wollen zu jeder von ihnen die Einwohnerzahl schreiben, so daß wir, mit der größten beginnend, zu immer kleineren fortschreiten, und schließlich wollen wir die Rangnummer mit der zugehörigen Einwohnerzahl multiplizieren. Um keine unnütz großen Zahlen zu bekommen und um das Wesentliche herauszuheben, wollen wir dabei fünf Nullen oder Stellen weglassen, d. h. wir wollen auf Hunderttausende abrunden; die so erhaltene Zahl

# The Law of Population Concentration

translation by Antonio Ciccone

At first glance, the facts of human life do not seem to conform to specific general laws as the phenomena of nature do. But, as statistics teaches us, the difference—due to the more complex relationships driving the facts of human life—is just minor and one must only learn to read statistical data to be able to draw general conclusions. Sometimes this yields interesting and odd laws.

Such a law concerning population statistics will be presented here and illustrated with examples. This law makes it possible to characterize the distribution of the population within a geographic area—a country for example—in a new and, at least in some respects, more accurate way than possible up to now.

The population of a geographic area can be distributed in very different ways within it. In some regions, the population may be living in individual farms or small farming villages. Other regions may have larger villages, towns, cities, or even global cities. There are only few global cities in the world and many countries do not have any. There are considerably more big cities and a large number of cities of medium size. The number of towns, small towns, and villages goes into the hundreds and thousands. For example, in Germany, there is just one global city if one relies on administrative borders and two global cities if one considers their topographic extent; the number of big cities is around 50 and the number of small cities around 200; and there are more than 2,000 country towns and nearly 100,000 villages.

Let us sort the places where people live in a country (or any geographic area, like a province or a continent) according to the number of inhabitants and give each place a rank number, starting with 1 for the place with most inhabitants. Let us also assign to each place its number of inhabitants. Finally, let us multiply the rank number of each place with its number of inhabitants. To avoid unnecessarily large numbers, we can drop the last 5 digits, i.e. round the number down to the nearest hundred thousand. This number will be called the “characteristic product” of the place or the “absolute concentration” of the

wollen wir das „charakteristische Produkt“ des Ortes oder die „absolute Konzentration“ der Bevölkerung (die Berechtigung dieses zweiten Ausdrucks wird sogleich einleuchtend werden) nennen, und durch A. K. abkürzen.

Führen wir die gedachte Operation beispielsweise für das Deutsche Reich aus und legen wir dabei die Volkszählung von 1910 zugrunde, mit der Modifikation, daß wir die topographisch zu einem Zentrum gehörigen Vororte diesem Zentrum zurechnen, so erhalten wir folgende Tabelle (E.-Z. in Tausenden, A.K. in Hunderttausenden).

Ein Blick auf dieselbe, noch deutlicher aber der Anblick der in Abb. 1 gegebenen graphischen Darstellung läßt nun erkennen, daß das charakteristische Produkt zwar anfangs stark hin- und herschwankt, daß aber sehr bald die Schwankungen geringer werden und daß schließlich dieses Produkt, ohne eine Tendenz zum Steigen oder Fallen, in überraschendem Maße konstant wird; von der Rangnummer 15 ab schwanken die Zahlen nur noch zwischen den Extremen 45 und 53. Man ist also berechtigt, einen Mittelwert zu bilden, und erhält dafür die Zahl 47,8. Es gibt also ein charakteristisches Produkt nicht bloß für einen einzelnen Ort, sondern für den ganzen Komplex, in unserm Falle für das Deutsche Reich. Es sei bemerkt, daß, wenn man die Reihe der Orte noch weiter fortsetzt, sich am Ergebnis nichts Wesentliches mehr ändert. So hat z. B. das Deutsche Reich 236 Orte mit mindestens 20000 Einwohnern und 481 Orte mit mindestens 10000 Einwohnern; wenn man also bei 20000 abbricht, erhält man als A. K. 47,2; bricht man bei 10000 ab, so erhält man 48,1. Indessen tut man doch besser, früher abzubrechen, eben weil es sich um die Konzentration der Bevölkerung handelt, und soweit hinab kann man unter den heutigen Verhältnissen kaum noch von Konzentration sprechen.

Die Zahl 47,2 ist also für die Bevölkerungskonzentration im Deutschen Reich charakteristisch. Freilich, wenn man sie mit den entsprechenden Zahlen anderer Staaten vergleichen will, muß man sie noch umgestalten mit Rücksicht auf die Erwägung, daß die Zahl doch naturgemäß desto größer ausfallen wird, je größer die Bevölkerung des Staates im ganzen ist, und zwar in proportionalem Verhältnis. Wir müssen daher unsere A. K. noch durch die Einwohnerzahl des Komplexes dividieren, wobei wir, um wieder bequeme Zahlen zu bekommen, als Einheit für die Einwohnerzahl eines Komplexes 100 Mill. nehmen. Für das Deutsche Reich, dessen Bevölkerung 64,6 Mill. beträgt, ist daher die A. K. durch 0,645 zu dividieren, und es ergibt sich

population—abbreviated by A.K. (The reasons for referring to the number as absolute concentration will become clear soon.)

For example, if we calculate these numbers for Germany based on the 1910 census, with the modification that suburbs and city centers are combined, then we obtain table 1 (the population of places is denoted by E.Z. and measured in thousands; A.K. is measured in hundreds of thousands).

Looking at table 1—or, even more clearly, at figure 1—makes clear that the absolute concentration (A.K.) fluctuates strongly in the beginning. But fluctuations become smaller very soon and then the absolute concentration is surprisingly constant, rather than rising or falling. In fact, from the rank number 15 onward, absolute concentration fluctuates only between the extrema of 45 and 53. One can therefore justify calculating the average, which is 47.8, and thereby obtains an absolute concentration for not just a single place but a geographic area, in our case Germany. It should be noted that if one were to extend the list of places even further, nothing essential would change. For example, Germany has 236 places with at least 20,000 inhabitants and 481 places with at least 10,000 inhabitants. If one stops at places with a population of 20,000, one obtains an absolute concentration A.K. of 47.2; if one stops at a population of 10,000, one obtains 48.1. In any case, it is better to stop earlier, because the absolute concentration of a geographic area is meant to capture the concentration of its population, and very far down the list one can hardly speak of population concentration.

The number 47.2 can therefore be used to characterize the population concentration of Germany. Of course, if one wants to draw comparisons with other countries, the absolute concentration has to be adjusted to take into account that it will increase proportionally with the total population size of a country. We must therefore divide the absolute concentration A.K. for a geographic region by its total population. For convenience, total population will be measured in hundreds of millions. For Germany, whose population is 64.6 million, we therefore have to divide its absolute concentration by 0.645 and we get—rounded down—the final number 74. This number will be called the reduced characteristic product, or better, the “specific concentration” of the

Table 1: Population and Absolute Concentration Across German Cities

Nr.	City (Ort)	E.-Z.	A.K.	Nr.	City (Ort)	E.-Z.	A.K.
1	Berlin	3579	36	48	Mülhausen	109	53
2	Hamburg	1168	23	49	Saarbrücken	105	51
3	Leipzig	622	19	50	Hamborn	103	52
4	München	610	24	51	Lübeck	99	51
5	Köln	593	30	52	Beuthen	98	51
6	Dresden	575	35	53	Bielefeld	97	51
7	Breslau	522	37	54	Münster	90	49
8	Essen	475	38	55	Oberhausen	90	50
9	Frankfurt a.M.	449	40	56	Bonn	88	49
10	Nürnberg	414	41	57	Metz	87	50
11	Hannover	383	42	58	Darmstadt	87	51
12	Düsseldorf	358	43	59	Bremerhaven	86	51
13	Elberfeld-Barmen	354	46	60	Görlitz	86	52
14	Stuttgart	315	44	61	Würzburg	84	51
15	Chemnitz	306	46	62	Freiburg i.Br.	83	52
16	Mannheim-Ludwigshafen	282	45	63	Bromberg	80	50
17	Magdeburg	280	48	64	Recklinghausen	79	51
18	Bremen	267	48	65	Wilhelmshaven	78	51
19	Dortmund	263	50	66	Offenbach	76	51
20	Stettin	258	52	67	Waldenburg i.Schl.	75	51
21	Königsberg i.Pr.	246	51	68	Remscheid	72	49
22	Duisburg	229	51	69	Bottrop	71	49
23	Kiel	209	48	70	Pforzheim	69	48
24	Bochum	193	46	71	Frankfurt a.O.	68	48
25	Straßburg	191	48	72	Ulm	68	49
26	Halle	183	48	73	Gera	68	50
27	Gelsenkirchen	177	48	74	Witten	67	50
28	Danzig	170	48	75	Harburg	67	51
29	Kassel	165	48	76	Gleiwitz	67	52
30	Posen	157	47	77	Liegnitz	67	52
31	Aachen	156	48	78	Osnabrück	66	52
32	Krefeld	155	50	79	Rostock	65	51
33	Augsburg	151	50	80	Koblenz	65	52
34	München-Gladbach	146	50	81	Potsdam	65	53
35	Braunschweig	144	50	82	Buer	62	51
36	Mainz	137	49	83	Heidelberg	61	51
37	Zabrze	136	50	84	Flensburg	61	51
38	Karlsruhe	134	51	85	Mörs	60	51
39	Solingen	129	50	86	Elbing	59	51
40	Kattowitz	128	51	87	Herne	57	49
41	Erfurt	124	51	88	Dessau	57	50
42	Plauen	121	51	89	Kaiserslautern	55	49
43	Königshütte	120	52	90	Brandenburg	54	49
44	Wiesbaden	119	52	91	Trier	54	49
45	Zwickau	118	53	92	Regensburg	53	49
46	Mülheim a.R.	112	52	93	Hildesheim	50	47
47	Hagen	110	52	94	Thorn	50	47

*Notes:* This table shows the population in thousands (E.-Z.) and absolute concentration measure (A.K.) for different German cities. The table reproduces the first table in Auerbach (1913).

abgerundet die endgültige Zahl 74. Wir wollen diese Zahl das reduzierte charakteristische Produkt, besser aber die „spezifische Konzentration“ der Bevölkerung nennen und mit Sp.K. abkürzen.

Man versteht, daß die hiermit festgestellte Zahl eine Bedeutung ganz für sich hat und daß sie sich von Zahlen ähnlicher Bedeutung, mit denen man schon längst operiert, deutlich und wesentlich verschieden ist. Das gilt namentlich von der nächstverwandten Größe, der mittleren Bevölkerungsdichte eines Staates. Es kann nämlich ein Land eine große Volksdichte und doch eine geringe Konzentration der Bevölkerung haben, wenn nämlich das Volk in unzähligen, aber nahe beieinander gelegenen Dörfern wohnt, und umgekehrt wird das Verhältnis, wenn es im ganzen zwar wenig Bevölkerung gibt, diese sich aber in wenigen größeren Orten sammelt. Damit soll natürlich nicht geleugnet werden, daß in vielen Fällen Dichte und Konzentration der Bevölkerung parallel gehen. Die Darstellung der mittleren Volksdichte hat übrigens noch einen allen Statistikern und Geographen bekannten Übelstand: daß man nämlich nicht recht weiß, wie man die großen Städte behandelt, ob man sie mitrechnet oder bis zu welcher Größenklasse man sie ausschließen soll; in beiden Fällen erhält man kein ungetrübtes Bild der Verhältnisse. Diese und andere Schwierigkeiten werden bei unserer Darstellung völlig vermieden, eben deshalb, weil wir ein Gesetz zugrunde legen, das uns eine universelle Konstante für alle Orte eines Komplexes liefert.

Mit diesen Betrachtungen sind wir freilich der Feststellung der Tatsachen vorangeeilt; wir haben jetzt den Beweis nachzuliefern, daß das aufgestellte Gesetz auch für andere Komplexe gilt. Zunächst also für andere Staaten. In Abb. 2 sind für sieben der wichtigsten Staaten die Kurven der spezifischen Konzentrationen zusammengestellt. Wie man sieht, dauert es bei den verschiedenen Staaten allerdings verschieden lange in der Reihe der Rangnummern, bis die Konstanz erreicht ist, und sie wird auch nicht immer in gleicher Vollkommenheit erreicht (wofür sich leicht die Aufklärung beibringen ließe). Immer aber läßt sich mit hinreichender Genauigkeit die Endzahl als Mittelwert berechnen und aus ihr schließlich die reduzierte charakteristische Zahl wie oben ableiten. In der folgenden Tabelle sind für die in der Abb. 2 behandelten Staaten sowie noch für einige andere die A. K. und die Sp. K. angegeben, und zwar geordnet nach der Größe der letzteren; die Zahlen beziehen sich für jeden Staat auf die letzte, in ihren Ergebnissen bekannt gewordene Volkszählung, alle zwischen 1909 und 1912 durchgeführt. Auch hier

population and abbreviated with Sp.K.

The specific concentration of the population in a country has a meaning which differs clearly and substantially from similar measures that have been used for a long time. This is especially true for the most closely related concept, the average population density of a country. A country can have a high population density but a low specific concentration if the population lives in many, closely located villages. And the relationship between population density and specific concentration is reversed if a country has a small population but the population is concentrated in a few bigger cities. This is not to deny that average population density and specific concentration will go together in many cases. The measure of average population density has, by the way, another drawback known to all statisticians and geographers: that one does not really know how to treat big cities, whether one should include them or exclude them up to a certain size class; neither approach yields an unclouded picture of the situation. These and other difficulties are completely avoided using the concept of specific concentration, precisely because it is based on a law that provides a universal constant for all places of a geographic area.

With these considerations we have gotten ahead of establishing the facts; we still have to provide evidence that the formulated law is also valid for other geographic areas. First, for other countries. Figure 2 shows the curves of specific concentration for seven of the most important countries. As can be seen moving from left to right along the horizontal axis, the rank number where the specific concentration starts being approximately constant differs across countries and the approximation is not always equally perfect (which could be easily explained). But the specific concentration of countries can always be finally calculated with sufficient precision. Table 2 lists the average absolute concentration A.K. and the specific concentration Sp.K. for the countries in figure 2 plus some others. Countries are listed from larger to smaller specific concentration and the population data is from the latest available census, all conducted between 1909 and 1912. Suburbs and city centers have again been combined into metropolitan areas in a cautious manner.

Table 2: Concentration Measures Across Countries

Country (Staat)	A.K.	Sp.K.
Netherlands (Niederlande)	5.3	91
Great Britain (Großbritannien)	39.4	87
Belgium (Belgien)	5.8	82
Switzerland (Schweiz)	2.6	75
Germany (Deutsches Reich)	47.8	74
United States (Vereinigte Staaten)	53.0	57
Italy (Italien)	15.9	47
France (Frankreich)	17.4	44
Spain (Spanien)	8.6	43
Austria-Hungary (Österreich-Ungarn)	16.8	32
European Part of Russia (Europäisches Rußland)	24.2	19
British India (Britisch-Indien)	36.0	11

*Notes:* This table shows the absolute concentration measure (A.K.) and specific concentration measure (Sp.K.) for different countries. The table is based on the second table in Auerbach (1913). The German country names are in parentheses.

ist wieder in vorsichtiger Weise der topographisch erweiterte Ortsbegriff zugrunde gelegt worden.

Die Konzentration der Bevölkerung ist also in Großbritannien achtmal so stark wie in Britisch-Indien, obgleich die mittlere Volksdichte dort nur knapp doppelt so groß ist wie hier; in Indien lebt eben ein sehr kleiner Teil der das Land dicht besiedelnden Bevölkerung in großen und mittleren Zentren. Und während Italien etwas dichter bevölkert ist als Deutschland, ist die Konzentration bei uns ganz wesentlich stärker. Wie allgemein unsere Darstellung ist, wie wenig bei ihr Einzelheiten den Ausschlag geben, selbst wenn sie an sich von schroffem Charakter sind, zeigt der Vergleich Italiens mit Frankreich; denn obgleich Frankreich eine Dreimillionenstadt besitzt, während Italien selbst die Millionenstadt fehlt, geht doch Italien mit seiner Ziffer noch etwas über Frankreich hinaus, die durchschnittliche Konzentration ist eben hier doch noch etwas größer als dort.

Auch für die einzelnen Teile eines Staates lassen sich die reduzierten Produkte leicht berechnen, nur muß man hier begreiflicherweise unter Umständen etwas weiter in der Rangordnung hinabsteigen, um die Konstanz zu erreichen. Es möge genügen, hier das Schlußergebnis für einige preußische Provinzen anzuführen, und zwar für solche extremen und mittleren Charakters: Die Reihenfolge ist hier dieselbe wie nach der mittleren Volksdichte, mit der Ausnahme, daß Posen hier, obgleich es dichter bevölkert ist als Ostpreußen, die letzte Stelle einnimmt.

The specific concentration Sp.K. of the population in Great Britain is eight times that of British-India, although its population density is only twice that of British-India; the reason is that India, while densely populated, has only a very small part of its population living in medium-size or large cities. And while Italy is somewhat more densely populated than Germany, the specific concentration of Germany is considerably larger. The comparison of Italy and France shows how general our characterization is and how little specificities turn out to matter, even if they are quite extreme; although France has a city of three million inhabitants while Italy does not have any city with more than one million inhabitants, Italy's specific concentration is still somewhat larger than that of France.

The specific concentration can also be calculated for a part of a country; only that here one has to descend a little further in the ranking of places for values to become approximately constant. Table 3 shows the result for Prussian provinces with average and large specific concentration. Specific concentration generally leads to the same ordering of provinces as average population density. The exception is Posen, which is more densely populated than East Prussia but has lower specific concentration.

Table 3: Concentration Measures Across German Provinces

Province (Provinz)	A.K.	Sp.K.
Rhineland (Rheinland)	10.8	152
Westfalia (Westfalen)	5.1	124
Silesia (Schlesien)	4.5	88
Hanover (Hannover)	2.5	83
East Prussia (Ostpreußen)	1.1	54
Poznan (Posen)	0.93	44

*Notes:* This table shows the absolute concentration measure (A.K.) and specific concentration measure (Sp.K.) for different German provinces. The table is based on the third table in Auerbach (1913). The German province names are in parentheses.

Anderserseits kann man den Komplex auch erweitern und beispielsweise Europa als ein Ganzes der Untersuchung unterwerfen. Man erhält dann bis etwa zur Rangnummer 30 (Einwohnerzahl 520000) langsam steigende Zahlen, dann aber werden sie, von kleinen Schwankungen abgesehen, konstant, und der Mittelwert A. K. für die 334 Orte mit wenigstens 50000 Einwohnern ist 169; dividiert man dies, der Einwohnerzahl von 432 Mill. entsprechend, durch 4,32, so erhält man als spezifische Konzentration 39. Wie man sieht, wird diese Zahl durch den beträchtlichen Einfluß Rußlands stark unter die Zahlen für die meisten europäischen Staaten herabgedrückt.

Ein letztes Beispiel möge sich auf die Änderungen beziehen, die die Konzentration der Bevölkerung im Laufe der Zeiten erfährt; wie man weiß, geht diese Änderung bei den meisten Staaten in steigendem Sinne vor sich, bei einigen in langsamem, bei andern in raschem Tempo. Für das Deutsche Reich erhält man das lehrreiche Bild der Abb. 3, in der die Kurven der Jahre 1895, 1900, 1905 und 1910 wiedergegeben sind, und zwar diesmal der Einfachheit halber direkt nach den amtlichen Zahlen, also ohne topographische Erweiterung. Diese Abbildung zeigt nun ganz deutlich, daß die Konzentration eine weitergehende Bedeutung hat als die Dichte. Denn daß die Kurven mit der Zeit nach oben rücken, ist schon eine Folge der zunehmenden Volksdichte; daß sie es aber so kräftig tun, rührt außerdem von der auch spezifisch zunehmenden Konzentration her; man braucht ja nur die beigefügten Zahlen für die Sp. K. anzusehen: diese wachsen von 1895 bis 1910 immer noch beträchtlich, obgleich doch der Einfluß der inzwischen gestiegenen Dichte aus diesen Zahlen völlig herausdividiert worden ist. Mit andern Worten: in diesen 15 Jahren ist gestiegen die Volksdichte von 52,3 auf 64,5, d. h. um 23 Proz.; die absolute Konzentration von 28,7 auf 49,5. d. h. um 72 Proz.

One can also examine much larger geographic areas, Europe as a whole for example. In this case one obtains slowly increasing absolute concentration up to around rank number 30 (population 520,000). From there onward, absolute concentration becomes—apart from small fluctuations—constant. The average A.K. of the 334 places with at least 50,000 inhabitants is 169; if one divides this number by 4.32—the population of Europe measured in hundreds of millions—one obtains a specific concentration of 39. As one can see, due to the influence of places in Russia, this number is substantially below the specific concentration of most European countries.

A last example illustrates changes over time in the concentration of the population. As is well known, the concentration of the population has been increasing in most countries, although at a different pace. Figure 3 shows the curves of absolute concentration A.K. for Germany in 1895, 1900, 1905 and 1910. Now the population of places is obtained using administrative borders for simplicity. The figure shows quite clearly that absolute concentration captures more than average population density. That the curves move up over time is a consequence of increasing population density; but that the curves move up so strongly is also due to the increasing concentration of the population. One only has to look at the included numbers for specific concentration Sp.K., which still grow considerably between 1895 and 1910 although the effect of increasing population density has been eliminated by rescaling. To put it differently, in these 15 years, the population density has increased from 52.3 to 64.5, i.e. by 23 percent; absolute concentration has increased from 28.7 to 49.5, i.e. by 72 percent; and specific concentration has increased from 55 to 77, i.e. by 40 percent.

und die spezifische Konzentration allein noch von 55 auf 77, d. h. um 40 Proz.

Obleich die Anwendbarkeit des Gesetzes hiermit noch nicht erschöpft ist, möge es doch mit diesen kurzen Ausführungen sein Bewenden haben; sie werden wohl genügen, um die Fachleute auf das Problem hinzuweisen und zu weiteren Feststellungen anzuregen, die dann, daran zweifle ich nicht, fachgemäßer ausfallen werden als die meinigen.

Aber in anderer Hinsicht bedarf das Gesagte noch eines Schlußwortes. Das aufgestellte Gesetz ist zunächst rein empirisch, wie so viele Gesetze der exakten Naturforschung. Natürlich erhebt sich nun die weitere Aufgabe, das Gesetz aus den inneren Verhältnissen des Falles verstehen zu lernen. Diese Aufgabe wird aber wesentlich erleichtert, wenn man zunächst feststellt, daß das Gesetz nur ein Spezialfall eines viel allgemeineren Gesetzes ist, das sich auf die verschiedensten Probleme der Naturwissenschaft, Erdkunde, Statistik, Volkswirtschaft usw. anwenden und etwa so aussprechen läßt: Wenn man  $n$  Individuen nach einer bestimmten Eigenschaft  $p$  in absteigender Folge ordnet und dabei entweder bei der Rangnummer  $n_1$ , oder bei  $n_2$ , oder allgemein bei der Rangnummer  $n_x$  aufhört, wobei dann jene Eigenschaft zuletzt auf den Wert  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_x$  herabgesunken ist, so besteht zwischen  $n_x$  und  $p_x$  ein bestimmtes Gesetz. In unserm Falle ist dieses Gesetz besonders einfach, es lautet in Formel:  $n_x \cdot p_x = \text{konstant}$ , oder in Worten: Die Anzahl der Orte steht im umgekehrten Verhältnis zu ihrer Mindest-Einwohnerzahl. In andern Fällen wird das Gesetz weniger einfach sein, und es mögen dafür zwei Beispiele angeführt werden. Bei den Gipfelhöhen eines Gebirges ist die Beziehung viel sanfter, der höchste Gipfel eines Gebirges übertrifft die folgenden meist nur wenig. Bei der Gruppierung der Einwohner eines Staates nach ihrem Vermögen andererseits ist die Beziehung viel schärfer, hier wächst die Anzahl der Zensiten etwa im quadratischen Verhältnis. Halbmillionäre gibt es nicht doppelt, sondern viermal soviel wie Millionäre. Woher diese Verschiedenheiten des Gesetzes kommen, das zu untersuchen ist nun eben das theoretische Problem, das sich an die rein empirische Feststellung knüpft. Hier müssen folgende Andeutungen genügen. Je einfacher die Bedingungen des Falles sind, um so sanfter wird im allgemeinen das Gesetz ausfallen, weil sich eine einzige treibende Kraft leichter erschöpft als zwei oder gar mehrere. Bei der Gipfelbildung handelt es sich im wesentlichen nur um die gebirgsbildende Kraft des damaligen Erdkörpers, und diese reichte eben über eine bestimmte Grenze nicht hinaus. Verwickelter sind die Verhältnisse bei

Although the law has further applications, these brief remarks should be enough to stimulate further research by experts who, I have no doubt, will be able to go deeper than myself.

There are some additional aspects that I want to touch upon in my conclusion. At this point, the law is purely empirical, like so many laws of the natural sciences. Of course, the next step is to understand what is behind it. This task becomes much easier if one first realizes that the law is a special case of a much more general law, which can be applied to the most diverse problems of the natural sciences, geography, statistics, economics, etc. The more general law can be formulated approximately as follows. Suppose one orders  $n$  individuals according to a certain property  $p$  in descending order and stops either at the rank number  $n_1$ , or at  $n_2$ , or—more generally—at rank number  $n_x$ , with the associated property  $p$  having fallen to the values  $p_1$ ,  $p_2$ , and  $p_x$ . Then a certain relationship exists between  $n_x$  and  $p_x$ . In our special case, the relationship is particularly simple; the equation is  $n_x \cdot p_x = \text{constant}$ . Or in words, the number of places is inversely proportional to the population of the smallest of these places. In other cases, the law will be less simple. Consider the following two examples. The first concerns the heights of the summits of a mountain range. In this case, the relationship is much weaker as the highest summit usually surpasses the following ones just by a little. The second example concerns the distribution of wealth across the inhabitants of a country. In this case, the relationship between rank number and personal wealth is much stronger, as the number of individuals is inversely proportional to the square of the minimum wealth in the group. That is, there are four times as many half-millionaires as millionaires, not just twice as many. The theoretical question is now where these variations of the law come from. Here I can only offer the following hints. The simpler the circumstances, the weaker will the relationship be in general. This is because a single driving force is exhausted more easily than two or more. The formation of summits is essentially just a question of the force that formed mountains and this force did not reach beyond a certain limit. Circumstances are more complex when it comes to the formation of cities and even more complex when it comes to the accumulation of wealth.

der Städtebildung und am kompliziertesten sind sie bei der Vermögensbildung.

Aber das sollen natürlich nur Anregungen und Beispiele sein, um den Sinn des hier Erörterten auch nach der theoretischen Seite klarzustellen.

Of course, these are only suggestions and examples to clarify the sense of what has been discussed here from a more theoretical perspective.

Figure 1: Population and Absolute Concentration

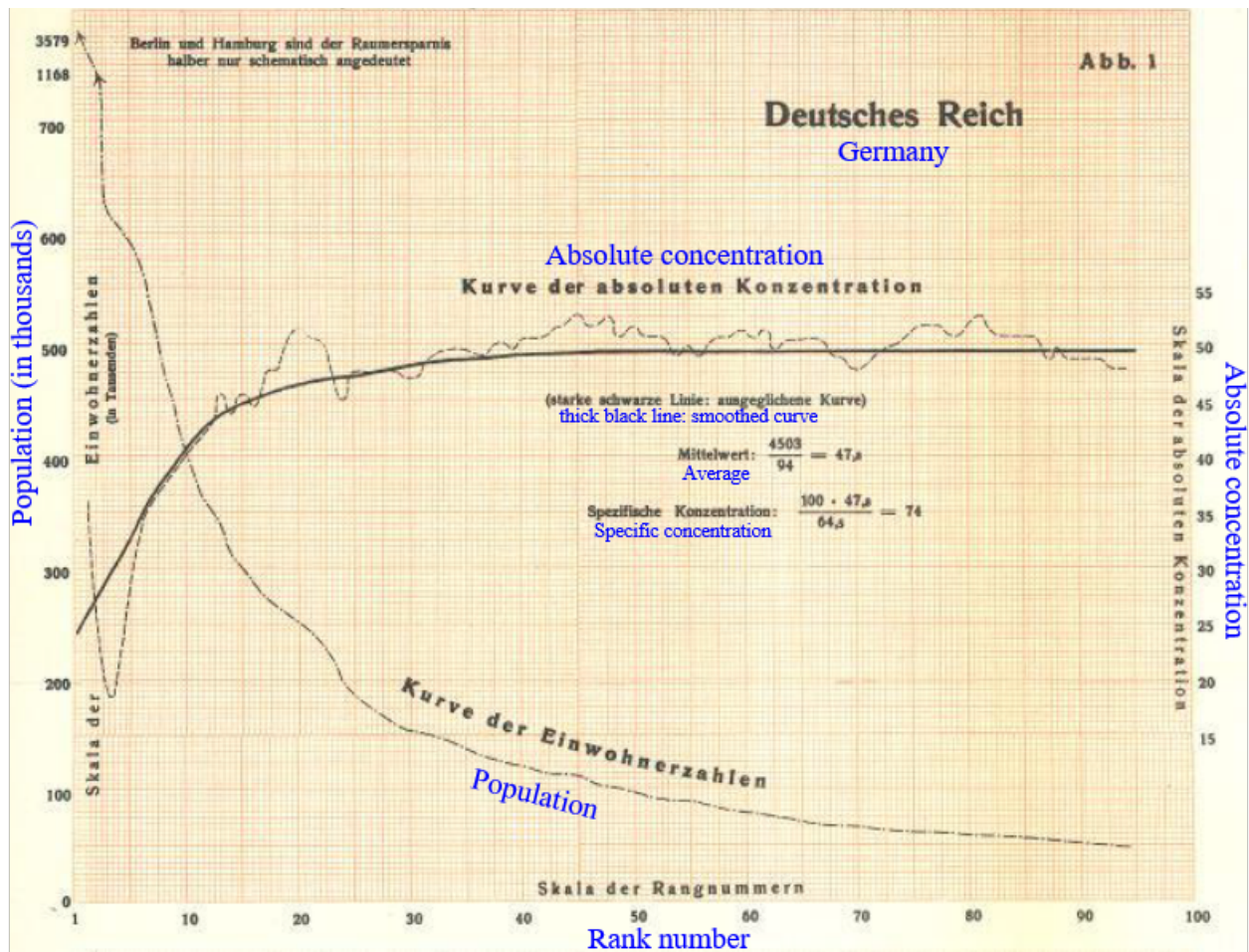


Figure 2: Specific Concentration of the Population Across Countries



Figure 3: Concentration of the Population in Germany

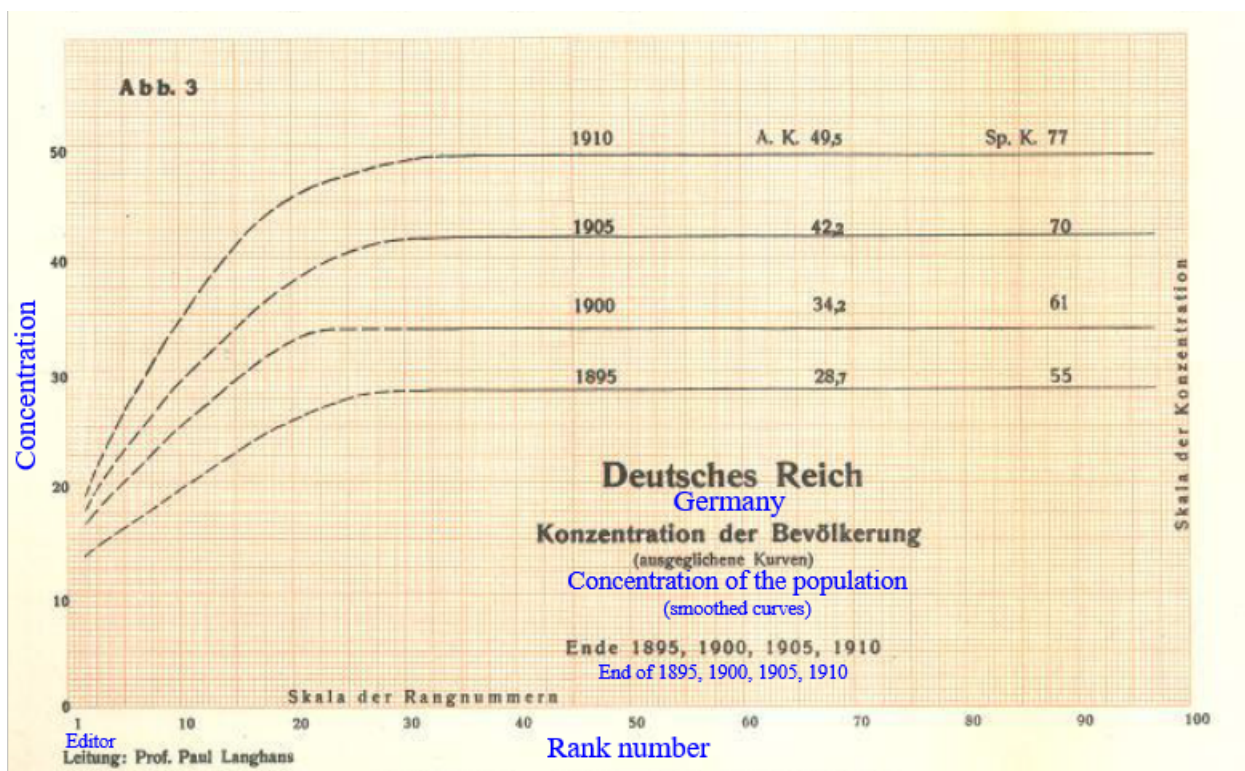
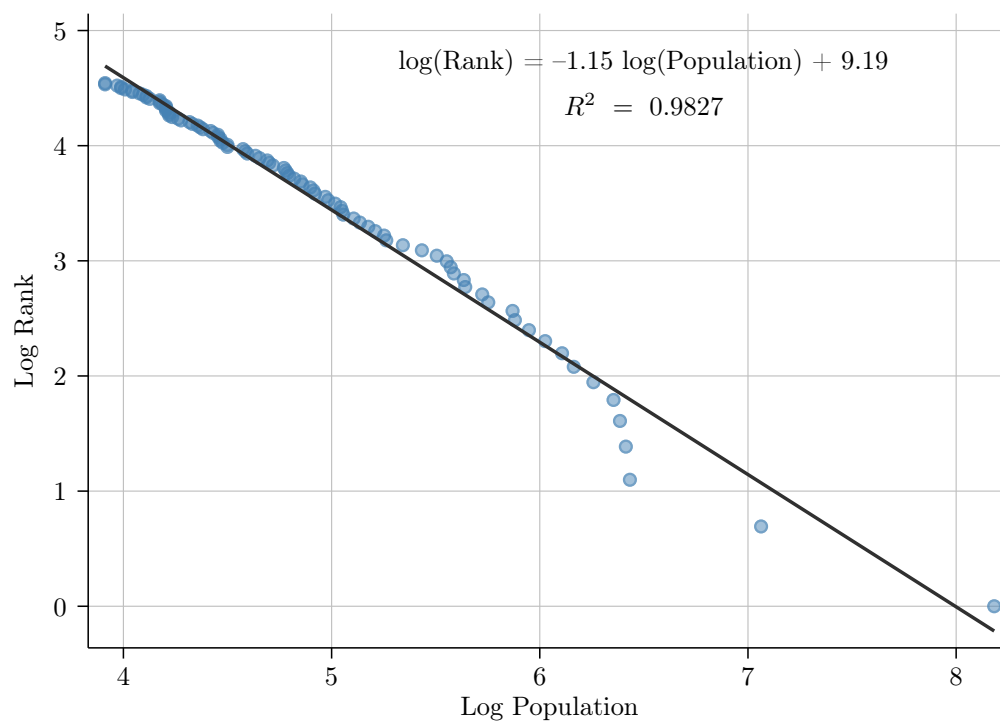


Figure 4: Log-Log Plot Using Auerbach's Data for German Cities in 1910



Notes: The data is from Felix Auerbach's *Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration* in Petermanns Geographische Mitteilungen, 59, 74-76, 1913. There are 94 cities in the graph. The robust standard error of the ordinary-least-squares slope ( $-1.15$ ) is 0.03.