Mindestanforderungskatalog Mathematik

Version 3.0

von Schulen und Hochschulen
Baden-Württembergs
für ein Studium von WiMINT-Fächern
(Wirtschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik)

www.cosh-mathe.de

1. November 2021

Vorwort

Das vorliegende Papier ist das Ergebnis einer Arbeitstagung an der Akademie Esslingen zum Thema „Übergangsschwierigkeiten in Mathematik an der Schnittstelle Schule zu Hochschule“ im Jahr 2012, überarbeitet an Tagungen in den Jahren 2014 und 2021. Teilnehmende waren Professorinnen und Professoren von Hochschulen für angewandte Wissenschaften und Universitäten sowie Lehrerinnen und Lehrer der beruflichen und allgemeinbildenden Gymnasien und der Berufskollegs in Baden-Württemberg.

Seit der Version 2.0 haben auch Vertreterinnen und Vertreter der Pädagogischen und der Dualen Hochschulen Baden-Württembergs mitgewirkt. Die Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule der Verbände DMV, GDM und MNU hat die Bemühungen um diesen Katalog ausdrücklich begrüßt, da Kataloge dieser Art in geeigneter Weise die Bildungsstandards konkretisieren können. Der Mindestanforderungskatalog erfährt eine breite Akzeptanz durch Hochschulen und Fachverbände.

Die Formulierung des Katalogs wurde initiiert von der Arbeitsgruppe cosh[1], die sich seit über zehn Jahren mit dem Übergang von Schule zu Hochschule beschäftigt. Bei diesem Übergang haben seit vielen Jahren die Studienanfängerinnen und -anfänger Probleme im Fach Mathematik. Empirische Analysen belegen, dass sich diese Problematik verschärft hat.

Bei den Tagungen wurde mehrfach auf die unterschiedlichen Bildungsaufträge von Schule und Hochschule hingewiesen. In der Hochschule wird Mathematik häufig zielgerichtet als Werkzeug und Sprache zur Lösung von komplexen berufsrelevanten Problemen eingesetzt. In der Schule steht der allgemeinbildende Charakter des Mathematikunterrichts im Vordergrund. Kompetenzen wie Argumentieren, Problemlösen oder Modellieren haben in den letzten Jahren im Mathematikunterricht ein deutlich größeres Gewicht erhalten. Die Schule soll nicht nur auf ein Ingenieurstudium vorbereiten.

Durch die Hochschulreife erhalten Schülerinnen und Schüler die formale Berechtigung, alle Fächer an Hochschulen studieren zu können. Offensichtlich beherrschen aber nicht alle die in der Schule vermittelten mathematischen Inhalte und Kompetenzen mit der Sicherheit, die für das Studium eines wirtschafts-, informations-, ingenieur- oder naturwissenschaftlichen

[1] Cooperation Schule-Hochschule

Faches (im Folgenden mit WiMINT bezeichnet) erforderlich ist. Es darf aber von Studienanfängerinnen und -anfängern erwartet werden, dass sie diese Lücken in eigener Verantwortung schließen können. Dabei sollen sie von den Schulen und Hochschulen unterstützt werden. Darüber hinaus setzt die Hochschulseite in den WiMINT-Studiengängen Kenntnisse und Fertigkeiten voraus, die nicht in den Bildungsplänen der Gymnasien und Berufskollegs in Baden-Württemberg abgebildet sind. Nach Einschätzung der Teilnehmenden ändern auch die beschlossenen bundesweiten Bildungsstandards nichts an dieser Diskrepanz.

Der folgende Mindestanforderungskatalog beschreibt die Kenntnisse, Fertigkeiten und Kompetenzen, die Studienanfängerinnen und -anfänger eines WiMINT-Studiengangs vorweisen sollten, um das Studium erfolgreich zu starten. Diese Anforderungen werden durch Aufgabenbeispiele im nächsten Abschnitt konkretisiert. Die Aufgaben sind keine Lehr-, Lern- oder Testaufgaben. Sie dienen lediglich der Orientierung und zur Konkretisierung bzw. Erläuterung der Kompetenzen. Die im folgenden Text in Klammern gesetzten Zahlen beziehen sich auf die anschließenden Aufgabenbeispiele.

Die Bildungspläne der Schularten, die zu einer (Fach-)Hochschulreife führen, variieren in Inhalten und der Tiefe, in der manche Themen behandelt werden. Darum gehen einzelne Kompetenzen und Aufgaben dieses Katalogs über die Inhalte der Bildungspläne dieser Schularten hinaus.

Aus drei Gründen messen die Teilnehmenden der Tagungen diesem Katalog eine außerordentliche Bedeutung zu:

- Er stellt das Ergebnis einer engagierten Diskussion und Analyse der eingangs beschriebenen Problematik dar und legt eine differenzierte Beschreibung dazu vor.

- Er wurde in einem breiten Konsens von beiden beteiligten Seiten – Schule und Hochschule – erstellt.

- Er spiegelt das Interesse von Schule und Hochschule wider, die Problematik gemeinsam zu lösen.

Der Katalog macht deutlich, dass die Anforderungen an der Schnittstelle Schule-Hochschule in großen Bereichen aufeinander abgestimmt sind. Die dort auftretenden Schwierigkeiten der Studienanfängerinnen und -anfänger können durch Vertiefungs- und Übungsangebote weitgehend aufgefangen werden. Die Analyse zeigt aber auch eine systematische Diskrepanz, die es aufzulösen gilt.

Die Teilnehmenden der Tagungen haben die Verantwortung der einzelnen Beteiligten an dieser Schnittstelle klar benannt:

- Die **Schule** muss den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, die in den Bildungsplänen verzeichneten Fertigkeiten und Kompetenzen zu erwerben. Schülerinnen und Schüler, die beabsichtigen, ein WiMINT-Fach zu studieren, sollen über die bestehenden Probleme informiert werden. Im Rahmen ihrer Möglichkeiten bietet die Schule Hilfestellungen an.

- Die **Hochschule** akzeptiert diesen Anforderungskatalog – und nicht mehr – als Basis für Studienanfängerinnen und -anfänger. Im Rahmen ihrer Möglichkeiten bietet die Hochschule Hilfestellungen an.

- Die **Studienanfängerinnen und -anfänger** müssen, wenn sie ein WiMINT-Fach studieren, dafür sorgen, dass sie zu Beginn des Studiums die Anforderungen des Katalogs erfüllen. Dafür muss ihnen ein adäquater Rahmen geboten werden.

- Die **Politik** muss auf die beschriebene systematische Diskrepanz reagieren. Solange diese Diskrepanz besteht, sind flächendeckend Maßnahmen erforderlich, um die beschriebenen Schwierigkeiten möglichst rasch zu beseitigen. Um die Qualität unseres Bildungssystems zu sichern, müssen Rahmenbedingungen für Schule, Hochschule, Studienanfängerinnen und -anfänger so verbessert werden, dass diese ihrer oben beschriebenen Verantwortung gerecht werden können.

Kompetenzen

1 Allgemeine mathematische Kompetenzen

Das Studium von WiMINT-Fächern erfordert zusätzlich zur allgemeinen Studierfähigkeit die Bereitschaft, auch komplexe Fragestellungen dieser Gebiete ohne Scheu anzugehen, daran hartnäckig und sorgfältig zu arbeiten und dabei die strenge Exaktheit der Fachsprache und Fachsymbolik zu akzeptieren. Die Nutzung elektronischer Hilfsmittel – insbesondere mathematischer Software – wird immer selbstverständlicher. Ihr sinnvoller Einsatz erfordert Kontrolle durch Plausibilitätsbetrachtungen, die eine besondere Vertrautheit im Umgang mit Zahlen und Variablen (vergleiche Kapitel 2) voraussetzen. Diese muss durch nachhaltiges Üben wachgehalten werden.

1.1 Probleme lösen

Sachverhalte oder Probleme in den WiMINT-Fächern können in unterschiedlichen Darstellungsarten vorliegen, zum Beispiel als Text, Grafik, Tabelle, Bild, Modell usw. Manchmal können Probleme auch offen formuliert sein. Die Studienanfängerinnen und -anfänger können

- dazu nützliche Fragen stellen (1, 58);
- die gegebenen Sachverhalte mathematisch modellieren (2, 3, 27);
- Strategien des Problemlösens anwenden (4, 8);
- Hilfsmittel (Formelsammlung, elektronische Hilfsmittel) angemessen nutzen (18, 49, 52, 53, 56).

1.2 Systematisch vorgehen

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können systematisch arbeiten. Sie

- zerlegen komplexe Sachverhalte in einfachere Probleme (40, 42);
- können Fallunterscheidungen vornehmen (5, 47b);
- arbeiten sorgfältig und gewissenhaft (68).

1.3 Plausibilitätsüberlegungen anstellen

Zur Kontrolle ihrer Arbeit können die Studienanfängerinnen und -anfänger

- Fehler identifizieren und erklären (6, 7, 12);
- Größenordnungen abschätzen (13, 14);
- mittels Überschlagsrechnung ihre Ergebnisse kontrollieren (8, 9).

1.4 Mathematisch kommunizieren und argumentieren

Für das Begreifen der Fragestellungen und das Weitergeben mathematischer Ergebnisse ist es unerlässlich, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger

- Fachsprache und Fachsymbolik verstehen und verwenden (10, 11, 12);
- mathematische Sachverhalte mit Worten beschreiben und erläutern (15, 16, 17);
- mathematische Behauptungen mithilfe von unterschiedlichen Darstellungsformen, z.B. Worten, Skizzen, Tabellen, Berechnungen oder Graphen, begründen oder widerlegen (4, 50);
- Zusammenhänge (mit und ohne Hilfsmittel) visualisieren (3, 18, 19);
- eigene sowie fremde Lösungswege nachvollziehbar präsentieren können (20).

2 Elementare Algebra

Wir setzen voraus, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger die Aufgaben zu den folgenden Kompetenzen – abgesehen von der Bestimmung eines numerischen Endergebnisses – ohne CAS-Rechner und ohne Taschenrechner (TR/GTR) lösen können.

2.1 Grundrechenarten

Die Studienanfängerinnen und -anfänger

- können überschlägig mit Zahlen rechnen (21);
- können die Regeln zur Kommaverschiebung anwenden (22);
- beherrschen die Vorzeichen- und Klammerregeln, können ausmultiplizieren und ausklammern (23);
- können Terme zielgerichtet umformen mithilfe von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz (24);
- beherrschen die binomischen Formeln mit beliebigen Variablen (25, 26);
- verstehen Proportionalitäten und können mit dem Dreisatz rechnen (27, 28, 55).

2.2 Bruchrechnen

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können die Regeln der Bruchrechnung zielgerichtet anwenden. Sie können

- erweitern und kürzen (29, 30, 31);
- Brüche multiplizieren, dividieren, addieren und subtrahieren (31, 32).

2.3 Prozentrechnung

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können mit Prozentangaben gut und sicher umgehen. Sie beherrschen die Zins- und Zinseszinsrechnung (9, 33, 34, 35).

2.4 Potenzen und Wurzeln

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können die Potenz- und Wurzelgesetze zielgerichtet anwenden. Sie wissen, wie Wurzeln auf Potenzen zurückgeführt werden, und können damit rechnen (31, 36, 37).

2.5 Gleichungen mit einer Unbekannten

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können Gleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen und Termumformungen lösen. Sie können

- lineare und quadratische Gleichungen lösen (38, 39, 40, 42d);
- (einfache) Bruchgleichungen auf bekannte Gleichungstypen zurückführen (39, 42d);
- einfache Exponentialgleichungen lösen (64);
- Gleichungen durch Faktorisieren lösen (42a);
- Wurzelgleichungen lösen und kennen dabei den Unterschied zwischen einer Äquivalenz und einer Implikation (41, 43);
- einfache Betragsgleichungen lösen und dabei den Betrag als Abstand auf dem Zahlenstrahl interpretieren (5a));
- Gleichungen durch Substitutionen lösen (biquadratisch, exponential, ...) (42c, 42b);
- Formeln nach einer Größe auflösen (43, 53).

2.6 Ungleichungen mit einer Unbekannten

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können die Lösungsmengen von einfachen Ungleichungen bestimmen. Sie können

- lineare Ungleichungen lösen (44);
- quadratische Ungleichungen grafisch lösen (45);
- einfache Betragsungleichungen lösen und dabei den Betrag als Abstand auf dem Zahlenstrahl interpretieren (46);
- Ungleichungen mit Brüchen lösen (5c), 47).

3 Elementare Geometrie/Trigonometrie

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können

- elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren (48, 49);
- grundlegende Sätze der Elementargeometrie (Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, Strahlensätze, Kongruenz von Dreiecken, Winkelsummen, Satz des Pythagoras) verstehen und anwenden (50, 51);
- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen (52, 53, 54);
- Oberflächeninhalt und Volumen einfacher Körper berechnen (Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel) (52, 53, 54).
- Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen (55, 56);
- Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen (57, 58, 59);
- Sinus und Kosinus als Koordinaten der Punkte des Einheitskreises identifizieren (60, 61);

4 Analysis

4.1 Funktionen

Die Studienanfängerinnen und -anfänger verfügen über ein Verständnis für Funktionen, d. h. sie

- kennen wichtige Eigenschaften (Definitionsmenge, Wertemenge, Symmetrie, Monotonie, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen) folgender elementarer Funktionen (62, 63, 64, 66):

  Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen), insbesondere lineare und quadratische Funktionen

  Potenzfunktionen, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$,

  Exponentialfunktionen (auch $x \mapsto \mathrm{e}^x$),

  $x \mapsto \ln(x)$,

  $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$,

  $x \mapsto \tan(x)$;

- können den qualitativen Verlauf der Graphen dieser elementaren Funktionen beschreiben sowie Funktionsterme von elementaren Funktionen ihren Schaubildern zuordnen und umgekehrt (65);

- können elementare Funktionen transformieren und die entsprechende Abbildung (Verschiebung sowie Streckung bzw. Stauchung in x- und y-Richtung, Spiegelung an Koordinatenachsen) durchführen (66, 67);

- können durch Addition, Multiplikation und Verkettung von Funktionen neue Funktionen erzeugen (68);

- können Wertetabellen und Graphen auch für nichtelementare Funktionen (in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel) erstellen (69);

- können aus gegebenen Bedingungen einen Funktionsterm mit vorgegebenem Typ bestimmen (70).

4.2 Differenzialrechnung

Die Studienanfängerinnen und -anfänger verfügen über ein grundlegendes Verständnis des Ableitungsbegriffs und beherrschen die zentralen Techniken der Differenzialrechnung, d. h. sie

- haben ein propädeutisches Wissen über Grenzwerte (71);
- verstehen die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate und als Tangentensteigung (72);
- können den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion erläutern (73);
- können aus dem Graphen einer Funktion den qualitativen Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion bestimmen und umgekehrt (74);
- kennen die Ableitungsfunktionen elementarer Funktionen (75);
- kennen die Summen-, Faktor-, Produkt- und Kettenregel und können diese sowie einfache Kombinationen davon anwenden (17, 76);
- können die Differenzialrechnung zur Bestimmung von Eigenschaften von Funktionen (insbesondere Monotonieverhalten und Extremstellen) nutzen (73, 77, 78);
- können mithilfe der Differenzialrechnung Optimierungsprobleme lösen (79).

4.3 Integralrechnung

Die Studienanfängerinnen und -anfänger verfügen über ein grundlegendes Verständnis des Integralbegriffs und beherrschen zentrale Techniken der Integralrechnung, d. h. sie

- verstehen das bestimmte Integral als Grenzwert von Summen (80);
- können das bestimmte Integral als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate und als orientierten Flächeninhalt interpretieren (81);
- kennen den Begriff der Stammfunktion und kennen die Stammfunktionen der grundlegenden Funktionen
  $x \mapsto x^k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ (82, 83a));
- können die Faktor- und Summenregel zur Berechnung von Stammfunktionen anwenden (83);
- können bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen (84);
- können die Integralrechnung zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Kurven anwenden (85).

5 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

5.1 Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem

Die Studienanfängerinnen und -anfänger finden sich sicher im zweidimensionalen Koordinatensystem zurecht. Insbesondere können sie

- eine analytisch gegebene Gerade zeichnen (86);
- Koordinatenbereiche skizzieren (87);
- einen durch eine Gleichung gegebenen Kreis zeichnen (88);

5.2 Lineare Gleichungssysteme

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können

- lineare Gleichungssysteme mit bis zu 3 Gleichungen und 3 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen. Offensichtliche Lösungen werden ohne Gauß-Elimination erkannt (89, 90);
- die Lösbarkeit derartiger Gleichungssysteme – in einfachen Fällen auch in Abhängigkeit von Parametern – diskutieren (90, 91);
- ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren (92).

5.3 Grundlagen der anschaulichen Vektorgeometrie

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können mit Vektoren in Ebene und Raum umgehen. Insbesondere

- können sie Vektoren als Pfeilklassen interpretieren (93);
- kennen sie die Komponentendarstellung von Vektoren (94, 95);
- können sie Punktmengen im Anschauungsraum mithilfe von Vektoren untersuchen (94, 95);
- beherrschen sie die Addition von Vektoren sowie die Multiplikation von Skalar und Vektor (95);
- können sie mithilfe von Vektoren Geraden und Ebenen im Raum darstellen und deren gegenseitige Lage untersuchen (96, 97, 98).

6 Stochastik

Die Studienanfängerinnen und -anfänger können

- mit den Begriffen der relativen und absoluten Häufigkeit umgehen sowie Lage- und Streuungsmaße berechnen und interpretieren (99, 100);
- verschiedene Diagrammarten als Veranschaulichung von Daten und Zufall erstellen und interpretieren und darauf basierende Argumentationen reflektieren und bewerten (101, 107);
- bei der Durchführung von Zufallsexperimenten die auftretenden relativen Häufigkeiten als Schätzwerte von Wahrscheinlichkeiten deuten und wissen, dass die Schätzwerte bei wachsendem Stichprobenumfang besser werden (101, 107);
- die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten bei Laplace-Experimenten durch einfache kombinatorische Überlegungen bestimmen (102, 103, 104, 108);
- mehrstufige Zufallsexperimente beispielsweise durch Baumdiagramme oder Vierfeldertafeln darstellen und damit Problemstellungen auch im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen (103, 105, 106).

Beispielaufgaben

Die aufgeführten Beispielaufgaben verdeutlichen das Anforderungsniveau der oben genannten Kenntnisse und Fertigkeiten.

1. Im Jahr 2020 hatte Deutschland $42,13$ Millionen weibliche und $41,03$ Millionen männliche Einwohner[2]. In Baden-Württemberg lebten $11,10$ Millionen Menschen, davon waren $50,30$ % weiblich. Die Anzahl der Studierenden betrug in Deutschland $2,89$ Millionen, in Baden-Württemberg 360.000 Millionen und in Hamburg 110.220.
   a) Formulieren Sie Fragen, die mithilfe dieser Daten beantwortet werden können. Welche Daten werden hierfür benötigt?
   b) Formulieren Sie eine Frage, für deren Beantwortung mindestens eine weitere Information notwendig ist.

2. Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten 10 s nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Stellen Sie den Geschwindigkeitsverlauf im Intervall von 0 s bis 10 s grafisch dar und geben Sie einen Funktionsterm an, der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

3. Ermitteln Sie den Term einer Sinusfunktion, die den Tagesgang der Temperatur modelliert. Bestimmen Sie die Parameter aus den folgenden Angaben: Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit 25 °C am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit 13 °C am kältesten.

4. Ein Schwimmbecken mit dem Volumen 720 m^3 kann durch drei Leitungen mit Wasser gefüllt werden. Eine Messung ergab, dass die Füllung des Beckens mit den beiden ersten Leitungen zusammen 45 Minuten dauert. Die Füllung mit der ersten und der dritten Leitung zusammen dauert eine Stunde, mit der zweiten und der dritten Leitung zusammen dauert es 1,5 Stunden.
   a) Erläutern Sie zunächst, wieso das nachfolgende lineare Gleichungssystem *nicht geeignet* ist, um das Problem zu lösen:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & \frac{3}{4} \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & \frac{3}{2} \end{array}$$

[2]Statistisch wurden nur die beiden Geschlechter erfasst, weswegen sich die Aufgabe darauf beschränkt.

b) Wie groß ist die Wassermenge, die durch jede der drei Leitungen pro Minute ins Becken gepumpt werden kann?

c) Wie lange benötigt man bei der Benutzung aller drei Leitungen, um das Becken zu füllen?

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen und Ungleichungen erfüllt?

   a) $|2x - 3| = 8$

   b) $|3x - 6| \leq x + 2$

   c) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 2$

6. Gegeben ist die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Polynomfunktion f. Welche Folgerungen sind falsch? Widerlegen Sie die falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

   - Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann ist x_0 eine Extremstelle von f.
   - Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.
   - Ist $f''(x_0) > 0$, so ist der Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ein Tiefpunkt des Graphen von f.

7. Welche der folgenden Umformungen für $a,\ b > 0$ sind richtig, welche falsch? Widerlegen Sie die falschen Umformungen mithilfe eines Gegenbeispiels.

   a) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

   b) $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$

   c) $\sin(a + b) = \sin(a) + \sin(b)$

   d) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

8. Im Jahr 2021 wurde in Baden auf einer Fläche von 15.836 Hektar Wein angebaut. Der durchschnittliche Ertrag pro Ar betrug $70,5$ Liter.
   Ermitteln Sie durch eine Überschlagsrechnung, wie lange die Flaschenreihe ungefähr wäre, wenn man die gesamte Jahresproduktion in Dreiviertelliterflaschen abfüllen und diese Flaschen der Länge nach hintereinander legen würde?

9. Zu Beginn jedes Jahres werden auf ein Sparbuch 1000 € eingezahlt.
   a) Das Guthaben wird während der gesamten Zeit mit einem Zinssatz von 5 % pro Jahr verzinst, und die Zinsen werden jeweils zum Jahresende dem Guthaben zugeschlagen. Überschlagen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 5. Jahres am nächsten kommt. Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das genaue Ergebnis zu berechnen.
   1250 €   5000 €   5250 €   5800 €   6250 €
   b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch eine exakte Rechnung.

10. Erläutern Sie den Unterschied zwischen der Menge $\{2; 5\}$, dem Intervall $[2; 5]$ und dem Intervall $]2; 5[$. Ist ein Intervall auch eine Menge? Entscheiden Sie für jedes $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ jeweils, ob $x \in \{2; 5\}$, $x \in [2; 5]$ beziehungsweise $x \in]2; 5[$ gilt.

11. a) Formulieren Sie in Worten:
   - $x \in \{0; 1; 2; 3\}$
   - $x \in [0; 1{,}5]$
   - $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$
   - $x \in \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$

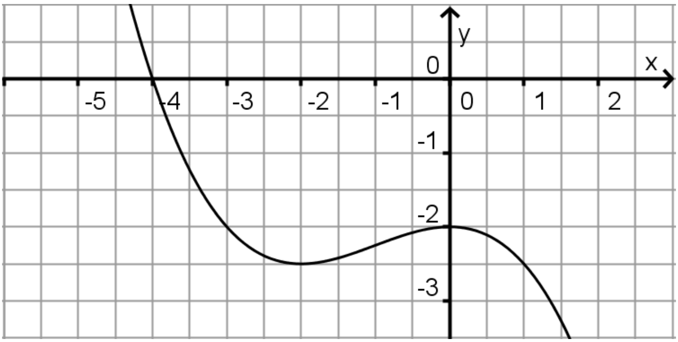
   b) Notieren Sie in Mengenschreibweise:
   - Die Zahl s ist größer oder gleich 5 und kleiner oder gleich 7.
   - Die Zahl 5 gehört nicht zu den einstelligen geraden Zahlen.
   - Die Funktion f hat 2 als einzige Definitionslücke.
   - Die Definitionsmenge D der Funktion g besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 1 sind.

12. Korrigieren Sie die falsche Schreibweise.
   a) $x^2 - 4 \Rightarrow (x + 2) \cdot (x - 2)$
   b) $(3 + 5) \cdot 4 = (3 + 5) = 8 \cdot 4 = 32$
   c) $3 \cdot -2$

13. Ordnen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners) die angegebenen Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten:
   0; $(0,5)^{-2,4}$; 1; 4; $4^{-3,8}$; $0{,}25$; $2^{-3,3}$; $(0{,}5)^{2,4}$; 8; 2^{-3}

14. Wenn man die Zahlen $a = (10^{10})^{10}$ und $b = 10^{(10^{10})}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen. Wie viele Stellen haben die Zahlen a bzw. b?
Auf eine Normseite passen 1800 Zeichen. Ein Drucker benötigt 5 Sekunden, um eine Seite zu drucken. Wie lange braucht er etwa, um die ausgeschriebenen Zahlen a und b zu drucken? Überschlagen Sie zuerst das Ergebnis und berechnen Sie es anschließend!

15. Die Abbildung zeigt für $-6 \leq x \leq 3$ das Schaubild der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

- $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von h.
- $h''(-2) = 1$.
- Die Funktion h ist auf dem Intervall $[-3; 1]$ streng monoton fallend.
- Das Schaubild von h hat an der Stelle $x_2 = -4$ einen Tiefpunkt.

Skizzieren Sie das Schaubild von h''.

16. Formulieren Sie den Term $a \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + d}$ so in Worten, dass ein Zuhörer ihn fehlerfrei aufschreiben kann.

17. Welche Ableitungsregeln benötigen Sie zur Ableitung der Funktion f gegeben durch $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$? Berechnen Sie die Ableitung.

18. Vor 200 Jahren wurden in Entenhausen 2 Dagos – das entspricht 0,3 € – bei einer Bank angelegt und zum Jahresende mit 8 % fest verzinst.

    a) Wie groß wäre das Guthaben heute, wenn die Zinsen stets wieder mitverzinst würden? Stellen Sie eine Wertetabelle auf und skizzieren Sie die Entwicklung des Guthabens in Abhängigkeit von der Zeit.

    b) Nach wie vielen Jahren wären die 2 Dagos auf 200 Dagos angewachsen?

    c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit nach 200 Jahren das Guthaben umgerechnet 2.000.000 € beträgt?

19. Betrachten Sie die beiden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{Bmatrix} -15x + 3y = 3 \\ -5,2x + y = 0 \end{Bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{Bmatrix} -15x + 3y = 3 \\ -5,1x + y = 0 \end{Bmatrix}$$

    a) Lösen Sie beide linearen Gleichungssysteme rechnerisch.

    b) Interpretieren Sie die Gleichungen als Geraden und skizzieren Sie diese. Erklären Sie, weswegen die beiden Schnittpunkte, die Sie in a) berechnet haben, weit auseinanderliegen.

    c) Verändern Sie den Koeffizienten vor x in der zweiten Gleichung, sodass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

20. Jan formuliert die Lösung einer Aufgabe in "Kurzschreibweise":

$$f(x) = 3x^2 - 12x - 5$$
$$g(x) = -6x - 8$$
$$f(x) = g(x):$$
$$3x^2 - 12x - 5 = -6x - 8$$
$$\Leftrightarrow \ldots$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

    a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.

    b) Welches geometrische Problem hatte Jan zu lösen?

    c) Interpretieren Sie das von Jan errechnete Ergebnis geometrisch.

21. a) Begründen Sie, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.

    b) Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{150}$?

22. Geben Sie als Dezimalzahl an:
    a) $0{,}005 \cdot 100$
    b) $\dfrac{78653}{10^4}$

23. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:
    a) $-(-(b + c - (5 - (-2c))))$
    b) $\dfrac{4 \cdot a \cdot b + 6 \cdot a}{2 \cdot (b + 1) + 1}$

24. Vereinfachen Sie den Ausdruck $3ab - (b(a - 2) + 4b)$.

25. Formen Sie $\left(\dfrac{b}{3x} - \dfrac{x^2}{b^3}\right)^2$ mit Hilfe der binomischen Formeln um und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.

26. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{4 - t^2}{4 - 4t + t^2}$.

27. Fließt ein Gleichstrom durch eine verdünnte Kupfersulfatlösung, so entsteht am negativen Pol metallisches Kupfer. Die abgeschiedene Kupfermenge ist sowohl zur Dauer des Stromflusses als auch zur Stromstärke proportional. Bei einer Stromstärke von 0,4 A werden in 15 Minuten 0,12 g Kupfer abgeschieden. Wie lange dauert es, bis 0,24 g Kupfer bei einer Stromstärke von 1 A abgeschieden werden?

28. Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixeln (der Einfachheit halber 6 Millionen Pixel) und produziert Bilder im Kleinbildformat 3 : 2. Welche Seitenlänge hat ein quadratisches Pixel auf einem Ausdruck im Format (60 cm) $\times$ (40 cm)?

29. Bringen Sie $\dfrac{a}{x - 2} + \dfrac{b}{(x - 2)^2} + \dfrac{c}{x - 3}$ auf den Hauptnenner.

30. Fassen Sie den Ausdruck $\dfrac{1}{x + 1} + x - 1$ zu einem Bruch zusammen.

31. Vereinfachen Sie $\left(\dfrac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\dfrac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$.

32. Formen Sie den Bruchterm $\dfrac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{\frac{1}{\omega \cdot C} + \mathrm{R}}$ so um, dass das Ergebnis nur einen Bruchstrich enthält.

33. Der Aktienkurs der Firma XXL fällt im Jahr 2019 um 10 % und wächst in den Jahren 2020 und 2021 um je 5 %. Ist der Kurs Ende 2021 gleich, höher oder tiefer im Vergleich zum anfänglichen Kurs?

34. Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus. Welchem Mittelpunktswinkel entspricht das?

35. Um welchen Faktor verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?

36. Fassen Sie den Ausdruck $x^2x^4 + \dfrac{x^8}{x^2} + \left(x^2\right)^3 + x^0$ zusammen.

37. Vereinfachen Sie $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$.

38. Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen der linearen Funktion f gegeben durch $f(x) = 12x + 14$ und der quadratischen Funktion g gegeben durch $g(x) = x^2 - 3x - 4$.

39. Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ nach x auf.

40. Welche der Aussagen sind in Bezug auf die Gleichung

$$(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-9\right) = 0$$

richtig? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

   a) Die Lösungen kann man ohne komplizierte Rechnungen angeben.
   b) $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen.
   c) $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen.
   d) $x = 1,4142$ und $x = 2$ sind Lösungen.
   e) Es gibt genau vier Lösungen.

41. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{8-2x} = 1 + \sqrt{5-x}$?

42. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

   a) $2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} = 0$
   b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
   c) $3 + 2\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} = 0$
   d) $\dfrac{x}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{6}{x^2-9}$

43. Stellen Sie die Formel nach der angegebenen Größe um:

   a) $v = \frac{s}{t}$ nach t

   b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ nach r

   c) $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ nach c

   d) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ nach R

   e) $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ nach m_1

44. Berechnen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 7 > 2 + 5x$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis grafisch.

45. Lösen Sie die Ungleichung $x^2 < 2x + 3$ grafisch.

46. Lösen Sie die Betragsungleichungen.

   a) $|x - 3| < 2$

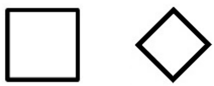
   b) $|2x - 3| > 5$

47. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{9}$;

   b) $\dfrac{1}{1-x} > 3$?

48. a) Wie viele Quadrate und wie viele Rauten sind hier dargestellt?



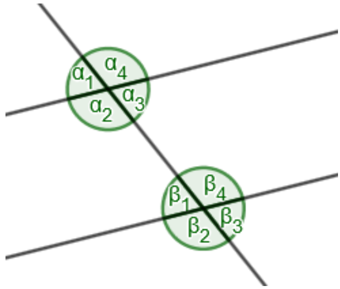
   b) Begründen Sie, dass beide Figuren Quadrate sind.

   c) Zeichnen Sie eine Raute, die kein Quadrat ist.

49. Begründen Sie, dass jedes Viereck, das zugleich Raute und Rechteck ist, ein Quadrat sein muss.

50. Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel besitzen.
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien nun D der Höhenfußpunkt von C, E der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt der beiden Höhen DC und EB.
    a) Skizzieren Sie den dargestellten Sachverhalt.
    b) Begründen Sie, dass die Dreiecke SCE, ADC, BEA und SDB ähnlich sind.

51. Gegeben ist die nebenstehende Zeichnung mit parallelen Geraden.
    a) Es ist $\alpha_1 = 37°$. Geben Sie die fehlenden Winkelgrößen an.
    b) Geben Sie jeweils zwei Paare von Neben-, Scheitel-, Stufen- und Wechselwinkeln an.



52. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen eines senkrechten Kreiszylinders mit dem Durchmesser 4 cm und der Höhe 8 cm.

53. Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit dem Volumen 60 cm^3 und der Höhe 6 cm. Berechnen Sie die Länge der Grundseite und den Inhalt der Grundfläche.

54. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 10 cm wird um eine der Symmetrieachsen gedreht. Welcher Körper entsteht? Welches Volumen und welchen Oberflächeninhalt hat der erzeugte Drehkörper?

55. a) Geben Sie die folgenden Winkel im Bogenmaß an: $135°; 19,7°$.
    b) Geben Sie die folgenden Winkel im Gradmaß an: 0,6π; 2,7.
    c) Ergänzen Sie die folgende Tabelle. Schreiben Sie die Winkel im Bogenmaß als Vielfache von π.

Bogenmaß	π		$\frac{\pi}{4}$	- $\frac{\pi}{3}$			1
Gradmaß		90°			270°	18°	

56. Die folgenden Werte wurden mit dem Taschenrechner berechnet und gerundet: $\cos(\frac{\pi}{4}) = 0,7071$, $\cos(\pi) = 0,998$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 0{,}027$, $\sin(270°) = -1$, $\sin(30°) = -0,988$.

   a) Überprüfen Sie ohne Taschenrechner, ob die Ergebnisse plausibel sind.

   b) Welcher Fehler wurde bei der Berechnung teilweise gemacht?

57. Eine 4 m lange Leiter wird in einer Höhe von 3,80 m an eine Hauswand gelehnt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein? Wie weit sind die Füße der Leiter von der Wand entfernt?

58. Von der auf 1800 m Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf 1100 m Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von 42° gegenüber der Waagerechten.
   Welche Größen lassen sich mit Hilfe der Trigonometrie berechnen?

59. Das zylinderförmige Schaufelrad eines Dampfers hat einen Durchmesser von 5,90 m.

   a) Bei entsprechender Beladung des Dampfers taucht das Rad 1,20 m tief in das Wasser ein. Wie viel Prozent des Umfangs der kreisförmigen Querschnittsfläche des Schaufelrads sind dann unter Wasser?

   b) Berechnen Sie den Tiefgang des Schaufelrads unter der Voraussetzung, dass 40 % des Umfangs unter Wasser sind.

60. Der Sinus von 15° ist ungefähr 0,2588. Bestimmen Sie damit ohne Taschenrechner näherungsweise die Werte $\sin(165°)$, $\sin(-15°)$ und $\cos(105°)$.

61. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0|0)$.

   a) Zeichnen Sie einen Punkt P auf dem Einheitskreis ein, so dass für den zu P gehörenden Winkel α zur x-Achse $\sin(\alpha) = 0{,}6$ ist. Begründen Sie, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ einen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft gibt.

   b) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$.

   c) Begründen Sie mithilfe des Einheitskreises, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ nur einen Punkt P gibt, für den gilt: $\cos(\alpha) = 0{,}8$.

   d) Erläutern Sie, warum $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$ für alle Winkel α gilt.

62. Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

   a) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

   b) Eine Polynomfunktion geraden Grades hat keine Nullstellen.

   c) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen.

   d) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Definitionsmenge.

   e) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Wertemenge.

   f) Alle Funktionen f mit $f(x) = a^x$ (mit $a > 0$) sind streng monoton wachsend.

   g) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

   h) Die Definitionsmenge der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+5}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 5 sind.

   i) Die Maximalstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ sind Wendestellen der Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$.

63. Gesucht ist der Term einer Polynomfunktion niedrigsten Grades mit den drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, deren Schaubild durch den Punkt $(0|3)$ geht.

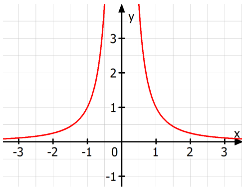
64. Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls des radioaktiven Jod-Isotops ${}^{137}_{57}I$ lautet $n(t) = n_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}062 \cdot t}$, t in Tagen.

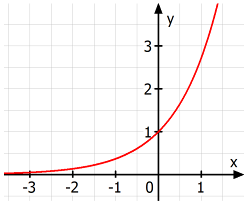
   a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit t_H von ${}^{137}_{57}I$.

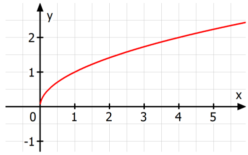
   b) Nach wie vielen Tagen sind nur noch 25 % des Stoffes vorhanden?

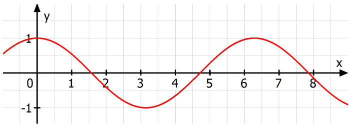
   c) Geben Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners an, zwischen welchen ganzzahligen Vielfachen der Halbwertszeit noch 5 % des Stoffes vorhanden sind?

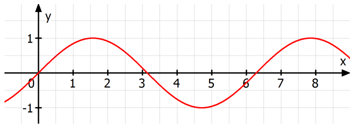
65. Ordnen Sie die Funktionsgraphen den unten aufgeführten Zuordnungen zu.

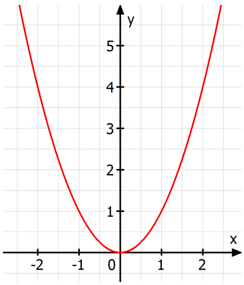


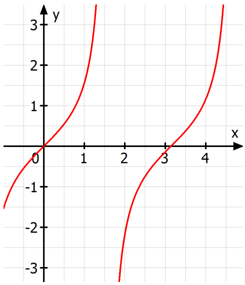


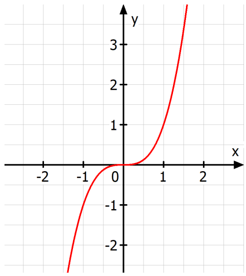


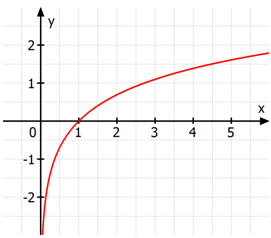


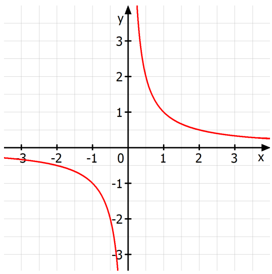












$x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$

66. Bestimmen Sie die Periode p der Funktion f mit $f(x) = -3\cos(2x)$ sowie – ohne Hilfsmittel aus der Differenzialrechnung – sämtliche Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte auf dem Intervall $0 \leq x < p$.

67. Skizzieren Sie den Graphen von f.

    a) $f(x) = \sin(x)$

    b) $f(x) = 2\sin(x)$

    c) $f(x) = \sin(-x)$

    d) $f(x) = -3\sin(x+2) - 1$

    e) $f(x) = \sin(3x+2)$

68. Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1$ und $f_3(x) = \sqrt{x}$. Bestimmen Sie möglichst einfache Terme der Funktionen g, h und k mit

    a) $g(x) = f_3(f_1(x) + f_2(x))$,

    b) $h(x) = f_3(f_1(x)) + f_2(x)$,

    c) $k(x) = f_1(f_2(x) + f_3(x))$

    und geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktionen an.

69. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

    a) $f(x) = |\sin(x)|$

    b) $f(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}$

70. a) Bestimmen Sie den Term der Funktion f mit $f(x) = a^x$, $a > 0$, deren Graph durch den Punkt $P(2|49)$ geht.

    b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, schneidet die y-Achse 2 Einheiten oberhalb des Ursprungs und hat den Hochpunkt $H(1|3)$. Bestimmen Sie den Term der Funktion f.

71. Wie verhält sich die Funktion f mit

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ für $x \to -\infty$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x \to -1$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ für $x \to -1$?

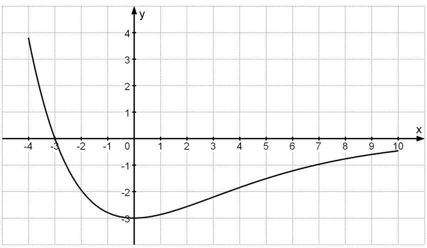
72. Beurteilen Sie die nachfolgenden Aussagen und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an, wenn eine Aussage nicht allgemeingültig ist.

a) Besitzt die Funktion f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2) = 1$.

b) Gilt $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.

c) Die lokale Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = -0,5x^2+2$ an der Stelle -3 ist positiv.

73. Die Abbildung zeigt für $-4 \leq x \leq 10$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



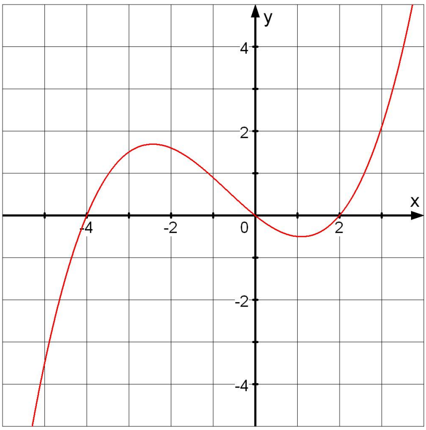
Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen wahr sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Die Funktion h ist auf dem Intervall $-3 < x < 10$ streng monoton fallend.

b) Die Funktion h hat an der Stelle -3 ein Minimum.

c) $x = 0$ ist eine Wendestelle von h.

74. Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



75. Geben Sie die Ableitungsfunktion an.

a) $f(x) = x^n$

b) $f(x) = \mathrm{e}^x$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sin(x)$

e) $f(x) = \cos(x)$

f) $f(x) = \ln(x)$

76. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = x^3 - 6x + 1$

b) $f(x) = \mathrm{e}^5$

c) $f(x) = (1 - x^2)^9$

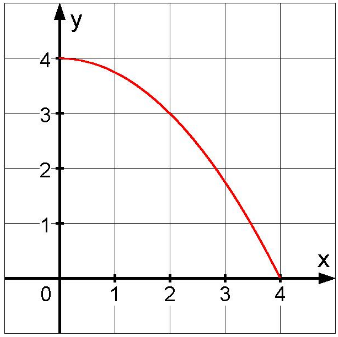
d) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot \sin(x)$

77. Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x + 1$. In welchem Bereich ist die Funktion f streng monoton fallend?

78. Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$.
Bestimmen Sie den Extrempunkt von f und weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

79. Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den positiven Koordinatenachsen, ein Eckpunkt auf dem abgebildeten Stück der Parabel mit der Gleichung $y = -0,25x^2 + 4$.
Wie groß müssen die Seitenlängen dieses Rechtecks sein, damit sein Umfang maximal wird?
Wie groß ist dann der Umfang?



80. a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$, indem Sie das Intervall $[0,1]$ in fünf gleiche Teile teilen und damit die Untersumme berechnen.
b) Wie kann man den Näherungswert verbessern?
c) Wie erhält man den exakten Wert des Integrals?

81. Bei einem Becken, das zu Beginn 2000 m^3 Wasser enthält, fließt Wasser ein und aus. Die Zuflussgeschwindigkeit kann für $t \in [0;70]$ durch die Funktion f beschrieben werden:
$f(t) = -t^2 + 40t + 225$ (t in Tagen seit Beginn, $f(t)$ in m^3/Tag).

Bestimmen Sie die Funktion, die die vorhandene Wassermenge zu jedem Zeitpunkt angibt. Wie viel Wasser befindet sich nach 30 Tagen im Becken?

82. f ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion mit der Ableitung f'. Welche Aussagen sind richtig?
a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung aber viele Stammfunktionen.
b) Sind F und G Stammfunktionen zu f, so ist auch die Summe $F + G$ eine Stammfunktion zu f.
c) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.
d) Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

83. Geben Sie eine Stammfunktion F der Funktion f an.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

c) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$

d) $f(x) = \sqrt{5x-1}$

84. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\int_{-1}^{2}(2x^3+1)dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2x))dx$

85. Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = 2x + 1$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

86. Zeichnen Sie die Gerade

a) mit der Gleichung $y = -2x + 3$;

b) mit der Gleichung $-2x + y - 5 = 0$;

c) mit der Gleichung $x + 8 = 0$;

d) mit der Steigung 3, die durch den Punkt $P(0|3)$ geht;

e) mit der Steigung -2, die durch den Punkt $P(2|3)$ geht;

f) durch die Punkte $A(-4|-3)$ und $B(1|3)$.

87. Schraffieren Sie in einem Koordinatensystem den Bereich, der durch die Ungleichung $|x - y| < 1$ gegeben ist.

88. a) Begründen Sie, dass durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ ein Kreis gegeben ist, und zeichnen Sie diesen.

b) Geben Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises gegeben durch $(x-2)^2 + y^2 = 25$ an.

89. Lösen Sie das folgende LGS.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2a & - & 3b & + & 4c & = & -17 \\ -a & + & 3b & - & 2c & = & 13 \\ a & + & 5b & + & 6c & = & -7 \end{array}$$

90. Lösen Sie das folgende LGS in Abhängigkeit vom Parameter t.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 18 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & t \end{array}$$

91. Durch die Punkte $P(-3|3)$ und $Q(3|0)$ gehen unendlich viele Parabeln.
    a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b, c der Parabelgleichung $y = ax^2 + bx + c$ auf.
    b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems.

92. Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in der x_1x_2-Ebene.

$$\begin{array}{lrcrcr} g\colon & 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ h\colon & x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

    Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Zeichnung.

93. Ein Flugzeug würde bei Windstille mit einer Geschwindigkeit von 150 km/h genau nach Süden fliegen. Es wird jedoch vom Wind, der mit der Geschwindigkeit 30 km/h aus nordöstlicher Richtung bläst, abgetrieben. Stellen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Erde als Pfeil dar.

94. Überprüfen Sie, ob das Viereck mit den Ecken $A(1|4|-1)$, $B(8|8|4)$, $C(4|4|3)$, $D(-3|0|-2)$ ein Parallelogramm ist.

95. P, Q, R und S sind Punkte im $\mathbb{R}^3$. Vereinfachen Sie:

a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

b) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$

c) $\overrightarrow{PQ} - \left(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}\right) + \overrightarrow{RS}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

96. Zeichnen Sie die Gerade g und geben Sie die Gleichung der Geraden in der Form $y = mx + b$ an.

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

97. Gegeben ist die Ebene

$$E\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad r, s \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie p so, dass $P(p|2|-2)$ in dieser Ebene liegt.

98. Welche Lagebeziehung haben die Geraden g und h mit

$$g\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R}$$

$$h\colon \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

zueinander? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

99. Paul hat drei Mathetests geschrieben, in denen nur ganze Noten zwischen 1 und 6 vergeben wurden. Im Durchschnitt hat er eine 3. Welche Noten kann er in den drei Tests geschrieben haben? Finden Sie mehrere Möglichkeiten.

100. In zwei Kisten mit Wassermelonen befinden sich unterschiedlich viele Wassermelonen unterschiedlicher Größe.

In der ersten Kiste befinden sich sieben Melonen mit den folgenden Gewichten: $4,8$ kg, $4,2$ kg, $4,2$ kg, $4,2$ kg, $4,5$ kg, $4,6$ kg, $4,3$ kg

In der zweiten Kiste befinden sich fünf Melonen mit den folgenden Gewichten: $3,8$ kg, $4,2$ kg, $3,7$ kg, $4,0$ kg, $4,2$ kg

Bestimmen Sie jeweils den Durchschnitt (das arithmetische Mittel) der Gewichte in den beiden Kisten sowie das durchschnittliche Gewicht aller 12 Wassermelonen. Wäre es richtig, den Durchschnitt der beiden Durchschnitte zu bilden, um den Gesamtdurchschnitt zu erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

101. Ein Würfel ist manipuliert worden und ergibt beim Werfen eine 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und alle anderen Ziffern mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Hannah experimentiert mit drei Würfeln: dem manipulierten Würfel, einem fairen Würfel und einem dritten Würfel mit bisher unbekannten Eigenschaften.

a) Welche Häufigkeiten erwarten Sie etwa, wenn der faire Würfel 2400-mal geworfen wird; welche beim manipulierten? Stellen Sie diese Häufigkeitsverteilungen jeweils in einem Säulendiagramm dar.

b) Im Experiment hat Hannah bei mehreren Durchgängen mit jeweils 1200 Würfen folgende Häufigkeiten notiert.

	1	2	3	4	5	6
Experiment 1	583	135	111	111	151	109
Experiment 2	982	47	46	48	37	40
Experiment 3	209	206	198	218	213	156

Welches der Experimente wurde vermutlich mit welchem Würfel durchgeführt? Begründen Sie Ihre Aussage!

102. In einer Klasse wird ein Ankreuz-Test durchgeführt. Es gibt 15 Antworten, 5 davon sind richtig, 10 davon falsch. Diese sind durch einen Zufallsgenerator angeordnet worden. Simon hat nicht gelernt und kreuzt wahllos 5 Antworten an. Ist einer der folgenden Vorschläge besser geeignet, um möglichst viele Punkte zu erzielen? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Vorschlag A: ⊠⊠⊠⊠⊠□□□□□□□□□□
Vorschlag B: □□⊠□⊠□□⊠⊠□□⊠□□□

103. Wie wahrscheinlich ist es, beim Spiel „Mensch-ärgere-Dich-nicht“ zu Beginn aus dem Häuschen zu kommen?

104. Benjamin hat acht Stifte in seinem Mäppchen, von denen jeder eine andere Farbe hat. Er möchte das Wort „cosh“ mit farbigen Buchstaben schreiben.

  a) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn jeder Buchstabe eine andere Farbe haben soll?

  b) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn alle Farben beliebig oft verwendet werden können?

  c) Anne nimmt vier Stifte von Benjamin. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

105. Maria hat einen E-Mail-Account, dessen Adresse auf einer Website steht. Etwa 80 % ihrer Mails sind Spam. Sandra empfängt bei ihrem Mail-Account nur etwa 20 % Spam-Mails. Beide installieren nun denselben Spam-Filter. Von diesem werden 95 % aller Spam-Mails in einen Spam-Ordner aussortiert, jedoch auch 1 % aller Mails, die kein Spam sind, werden fälschlicherweise aussortiert. Wie wahrscheinlich ist es, dass eine nicht aussortierte Mail

  a) bei Maria dennoch Spam ist?

  b) bei Sandra dennoch Spam ist?

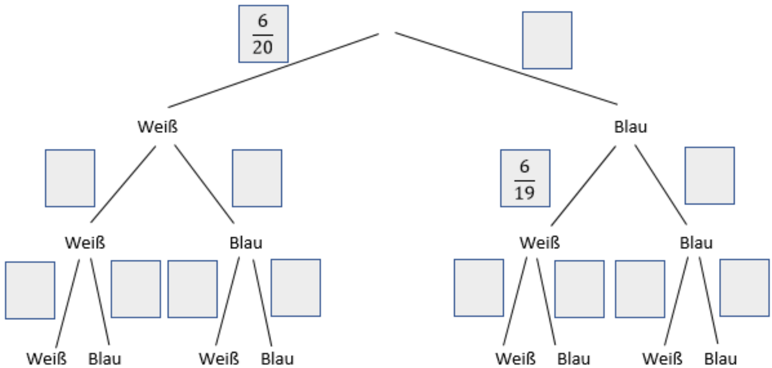
  Hinweis: Spielen Sie jeweils das Eintreffen von 1000 Mails mit einem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel durch und berechnen Sie den Anteil unter den nicht aussortierten Mails, die Spam sind, indem Sie die errechneten Häufigkeiten geeignet auswerten.

  c) Die Ergebnisse in a) und b) sind recht unterschiedlich, obwohl derselbe Spamfilter verwendet wird. Woran liegt es, dass es zu solch unterschiedlichen Spam-Anteilen bei den nicht aussortierten Mails kommt?

106. In einer Kiste befinden sich 20 Tischtennisbälle in den Farben weiß und blau. Tina zieht nacheinander drei Bälle heraus.

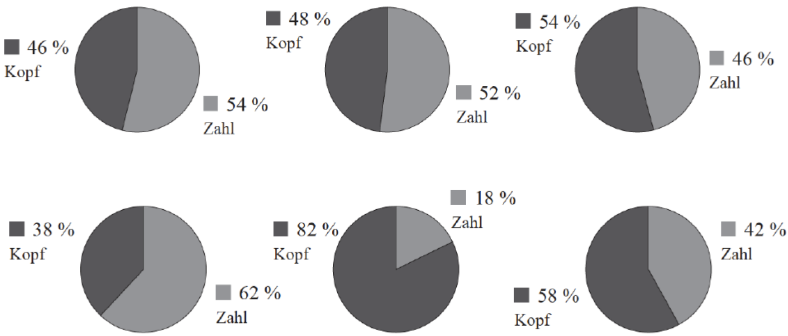
  a) Ergänzen Sie das nachfolgende Baumdiagramm um die Wahrscheinlichkeiten in den grau hinterlegten Kästchen.

  b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tina drei blaue Bälle erwischt?



107. Leon und Anna haben eine faire Münze geworfen. Leon hat die Münze 50-mal geworfen. Die Anteile, mit denen „Kopf“ bzw. „Zahl“ vorgekommen sind, hat er in Prozent berechnet und anschließend in einem Kreisdiagramm veranschaulicht. Dieses „50-mal-Münze-werfen-Experiment“ hat er dreimal durchgeführt und seine drei Kreisdiagramme nebeneinander in einer Reihe angeordnet.

Anna hat die Münze 200-mal geworfen. Auch sie hat dies dreimal durchgeführt und ihre drei Kreisdiagramme auch nebeneinander in einer Reihe angeordnet.



Welche Reihe gehört vermutlich zum Experiment von Leon, welche zu Annas? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

108. Zwei ideale Ein-Euro-Münzen werden gleichzeitig geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine davon Zahl und die andere Wappen zeigt?

Tagungsteilnehmende 2012 beziehungsweise 2014:

OStR Friedrich Achtstätter, LS Stuttgart
StD Annemarie Ahring-Nowak, Technische Oberschule Stuttgart
Dr. Jochen Berendes, Geschäftsstelle für Hochschuldidaktik Karlsruhe
StD Achim Boger, Berufliche Schulen Schwäbisch Gmünd
Prof. Dr. Steffen Bohrmann, HS Mannheim
Prof. Dr. Manuela Boin, HS Ulm
Prof. Hanspeter Bopp, HfT Stuttgart
Dr. Isabel Braun, HS Karlsruhe
StD Gabriele Brosch-Kammerer, Berufliches Schulzentrum Leonberg
StD Heidi Buck, Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Tübingen (Gymnasium)
Prof. Dr. Eva Decker, HS Offenburg
StD Ralf Dehlen, Gewerbliche Schule Kirchheim/Teck
StD Renate Diehl, IBG Lahr
Prof. Rolf Dürr, Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Tübingen (Gymnasium)
Prof. Dr. Klaus Dürrschnabel, HS Karlsruhe
StD Armin Egenter, Gewerbliche Schule Heidenheim
Prof. Dr. Michael Eisermann, Uni Stuttgart
StD Wolfgang Eppler, Walther-Groz-Schule, Kaufmännische Schule Albstadt
StR Andrea Erben, Kaufmännische Schule Böblingen
Prof. Dr. Wolfgang Erben, HfT Stuttgart
Prof. Dr. Michael Felten, HDM Stuttgart
Prof. Dr. Gerhard Götz, DHBW Mosbach
Dr. Daniel Haase, KIT
Prof. Bernd Hatz, Elly-Heuss-Knapp-Gymnasium Stuttgart
Prof. Dr. Elkedagmar Heinrich, HS Konstanz
Prof. Dr. Gert Heinrich, DHBW Villingen-Schwenningen
Prof. Dr. Frank Herrlich, KIT
StD Dr. Jörg Heuss, Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Karlsruhe (Berufliche Schulen)
Prof. Dr. Stefan Hofmann, HS Biberach
Dr. Ralph Hofrichter, HS Pforzheim
OStR Christa Holoch, Johanna-Wittum-Schule Pforzheim
Prof. Dr. Reinhold Hübl, DHBW Mannheim
Prof. Dr. Andreas Kirsch, KIT
Prof. Dr. Hans-Dieter Klein, HS Ulm
Dr. Michael Kölle, RP Tübingen
StD Bernhard Koob, Gottlieb-Daimler-Schule 2 Sindelfingen
StR Ulrike Kopizenski, Hubert-Sternberg-Schule Wiesloch
Prof. Dr. Harro Kümmerer, HS Esslingen
Prof. Dr. Günther Kurz, HS Esslingen
Prof. Dr. Axel Löffler, HS Aachen
Prof. Dr. Frank Loose, Uni Tübingen
Prof. Dr. Karin Lunde, HS Ulm
Prof. Dr. Werner Lütkebohmert, Uni Ulm
StR Vera May, Albert-Einstein-Schule Ettlingen
Prof. Dr. Silke Michaelsen, HTWG Konstanz
Prof. Dr. Thomas Morgenstern, HS Karlsruhe

Prof. Dr. Gerrit Nandi, DHBW Heidenheim
Prof. Dr. Cornelia Niederdrenk-Felgner, HS Nürtingen-Geislingen
Dipl.-Math. Bernd Oder, HS Aalen
Prof. Dr. Guido Pinkernell, PH Heidelberg
Prof. Dr. Stephan Pitsch, HS Reutlingen
Prof. Dr. Ivica Rogina, HS Karlsruhe
Dr. Norbert Röhrl, Uni Stuttgart
Prof. Dr. Ralf Rothfuss, HS Esslingen
StD Dr. Torsten Schatz, Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Tübingen (Gymnasium)
Prof. Dr. Axel Schenk, HS Heilbronn
Dipl.-Math. Jochen Schröder, HS Karlsruhe
Prof. Dr. Axel Stahl, HS Esslingen
StR Martin Stöckel, Carl-Engler-Schule Karlsruhe
StD Ulla Sturm-Petrikat, Oskar-von-Nell-Breuning-Schule Rottweil
Prof. Dr. Kirstin Tschan, HS Furtwangen
Prof. Dr. Ursula Voss, HS Reutlingen
Prof. Hans-Peter Voss, Geschäftsstelle für Hochschuldidaktik Karlsruhe
MR Steffen Walter, Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst, Stuttgart
StD Bruno Weber, LS Stuttgart
StD Dr. Thomas Weber, Carl-Engler-Schule Karlsruhe
Prof. Dr. Frédéric Weller, HS Esslingen
Prof. Dr. Holger Wengert, DHBW Stuttgart
RSD Karen Wunderlich, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, Stuttgart
StD Rita Wurth, Mettnau-Schule Radolfzell

Tagungsteilnehmer 2021:

Prof. Dr. Isabel Acker, HS Nürtingen-Geislingen
Prof. Dr. Volker Bach, Universität Braunschweig
StR Christopher Balszun, Louise-Schroeder-Gymnasium München
StD Achim Boger, Gewerbliche Schule Schwäbisch Gmünd
Prof. Dr. Manuela Boin, TH Ulm
Prof. Dr. Martin Bokler, Technische Hochschule Mittelhessen
RSD Jana Bursian, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, Stuttgart
Prof. Dr. Eva Decker, HS Offenburg
Dr. Jens Dennhard, Integrierte Gesamtschule Mannheim Herzogenried
Prof. Dr. Klaus Dürrschnabel, HS Karlsruhe
StD Armin Egenter, Gewerbliche Schule Heidenheim
Prof. Dr. Michael Eichmair, Universität Wien
Prof. Dr. Wolfgang Erben, HfT Stuttgart
Prof. Dr. Viola Galler, HS Pforzheim
Prof. Dr. Gerhard Götz, DHBW Mosbach
StD Axel Goy, Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Weingarten (Berufliche Schulen und Gymnasium)
OStR Rainer Grunert, Mathilde-Planck-Schule Ludwigsburg
Dr. Daniel Haase, MINT-Kolleg Karlsruhe
Dr. Michael Harder, Universität Ulm
Prof. Dr. Zerrin Harth, HS Ravensburg-Weingarten
StD Dr. Thilo Höfer, Staufer-Gymnasium Waiblingen
Dr. Ralph Hofrichter, HS Pforzheim

Prof. Dr. Reinhold Hübl, DHBW Mannheim
StD Markus Kammerer, Droste-Hülshoff-Gymnasium, Rottweil
Prof. Dr. Hanno Käss, HS Esslingen
Prof. Dr. Anselm Knebusch, HfT Stuttgart
M.Sc. Jan Köllner, Universität Stuttgart
StD Bernhard Koob, Gottlieb-Daimler-Schule 2 Sindelfingen
Gabriella Lambrecht, DHBW Heilbronn
Prof. Dr. Axel Löffler, HS Aalen
Prof. Dr. Frank Loose, Universität Tübingen
MDg Klaus Lorenz, Ministerium für Kultus und Sport, Stuttgart
Prof. Dr. Karin Lunde, TH Ulm
Martin Mayerhofer, Universität Wien
Dipl.-Math. Edith Mechelke-Schwede, DHBW Mannheim
Dipl.-Math. Konstanze Mehmedovski, HfT Stuttgart
Prof. Dr. Silke Michaelsen, HS Konstanz
OStR'in Heidi Mössner, John-F.-Kennedy-Schule Esslingen
David Obermayr, DHBW Mannheim
Prof. Dr. Gerald Oberschmidt, DHBW Karlsruhe
Dipl.-Math. Bernd Oder, HS Aalen
Prof. Dr. Walther Paravicini, Universität Tübingen
OStR'in Anja Peters, Ludwig-Erhard-Schule Pforzheim
Prof. Dr. Guido Pinkernell, PH Heidelberg
Prof. Dr. Barbara Priwitzer, HS Reutlingen
Dr. Kevin Rapedius, MINT-Kolleg Karlsruhe
OStR'in Petra Ritter, Ludwig-Marum-Gymnasium
Prof. Dr. Torsten Schatz, Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Tübingen (Gymnasium)
Christina Schneider, DHBW Karlsruhe
StR'in Jolan Schneider-Kis, Helene-Weber-Schule Bad Saulgau
Dr. Oliver Schöll, Ministerium für Schule und Bildung NRW
Dipl.-Math. Jochen Schröder, HS Karlsruhe
Dr. Daniel Schropp, Universität Ulm
M.Sc. Britta Schuetter-Kerndl, TH Ulm
Dipl.-Math. Henrik Söderberg, HS Nürtingen-Geislingen
Prof. Dr. Kirstin Tschan, HS Furtwangen
MR Steffen Walter, Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst, Stuttgart
StD'in Nathalie Weber, Lessing-Gymnasium Karlsruhe
StD Dr. Thomas Weber, Carl-Engler-Schule Karlsruhe
OStR Albert Weinmann, Ferdinand-von-Steinbeis-Schule Reutlingen
Dr. Andrea Wirmer, Universität Ulm
StR'in Dr. Marinela Wong, Heinrich-Wieland-Schule-Pforzheim
RSD Karen Wunderlich, Ministerium für Kultus, Jugend und Sport, Stuttgart

Satz:

Dr. Isabel Braun, Projekt 'SKATING', HS Karlsruhe (Version 1.0)
Dipl.-Math. Jochen Schröder, HS Karlsruhe (Versionen 2.0 und 3.0)